@physicsjeiroodi

دفترچهٔ پاسخ

آزمون ۱۸ مهر ماه ۹۹

اختصاصی دوازدهم ریاضی (نظام جدید)

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

	نام درس	نام طراحان
اختصاصی	حسابان ۲	کاظم اجلالی- شاهین پروازی- عادل حسینی- علی سلامت- علی شهرابی- سعید علم‌پور- حمید علیزاده مهدی ملارمضانی- حمیدرضا نوش‌کاران
	هندسه	علی ایمانی- جواد حاتمی- سیدمحمدرضا حسینی‌فرد- افشین خاصه‌خان- منوچهر خاصی- فرشاد فرامرزی- سهام مجیدی پور زویا محمدعلی پورقهرمانی‌نژاد- مجید محمدی‌نویسی- مهدی نیک‌زاد- امیر وفائی- سرژ یقیازاریان تبریزی
	ریاضیات گسسته	سید محمدرضا حسینی‌فرد- سید وحید ذوالفقاری- علیرضا طایفه تبریزی- فرشاد فرامرزی- سهام مجیدی‌پور نیلوفر مهدوی- مهدی نیک‌زاد- امیر وفائی
	فیزیک	خسرو ارغوانی‌فرد- عبدالرضا امینی‌نسب- زهره آقا محمدی- محمد پوررضا- سعید طاهری‌بروجنی سیاوش فارسی- علی قائمی- محسن قندچلر- مهدی کاظمیان‌فر- مصطفی کیانی- علیرضا گونه- غلامرضا محبی حسین مخدومی- سیدعلی میرنوری
	شیمی	محمدرضا پورجاوید- مبینا شرافتی‌پور- محمد عظیمیان زواره- حسن لشکری- محمدحسن محمدزاده مقدم سیدمحمدرضا میرقائمی

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه	ریاضیات گسسته	فیزیک	شیمی
گزینشگر	کاظم اجلالی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	سیدعلی میرنوری	محمدحسن محمدزاده مقدم
گروه ویراستاری	مرضیه گودرزی علی ارجمند مهدی ملارمضانی علی مرشد	سیدعادل حسینی	سیدعادل حسینی	امیر محمودی انزابی مهدی نیک‌زاد زهره آقامحمدی سیدعلی میرنوری	یاسر راش آرش رضایی حسن رحمتی‌کوکنده محمدرضا یوسفی متین هوشیار
مسئول درس	سیدعادل حسینی	امیرحسین ابومحبوب	امیرحسین ابومحبوب	بابک اسلامی	محمدحسن محمدزاده مقدم

گروه فنی و تولید

مدیر گروه	محمد اکبری
مسئول دفترچه	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: فاطمه رسولی‌نسب — مسئول دفترچه: آتنه اسفندیاری
حروف‌نگار	فاطمه روحی- ندا اشرفی
ناظر چاپ	سوران نعیمی

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – کانون فرهنگی آموزش – تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱

www.kanoon.ir

@physicsjeiroodi

حسابان ۲

۸۱- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

اگر عرض نقاط نمودار تابع f را بر ۳ تقسیم کنیم (در $\frac{1}{3}$ ضرب کنیم) نمودار تابع $y=\frac{1}{3}f(x)$ به دست می‌آید و در واقع نمودار تابع f منقبض می‌شود. نمودار تابع گزینهٔ «۱» از انبساط افقی نمودار تابع f، گزینهٔ «۲» از انقباض افقی نمودار تابع f و گزینهٔ «۳» از انبساط عمودی نمودار تابع f حاصل می‌شود.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۶ و ۷)

۸۲- **گزینهٔ «۲»** *(علی سلامت)*

ابتدا تغییراتی را که بر روی تابع f صورت گرفته اعمال می‌کنیم.

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{طول نقاط ۲ برابر شود}}g(x)=f(\frac{1}{2}x)\xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به راست}}g(x-4)$$

$$=f(\frac{1}{2}(x-4))=f(\frac{1}{2}x-2)$$

حال برای آنکه تابع حاصل به تابع $y=f(\frac{1}{2}x-4)$ تبدیل شود، آن را ۴ واحد دیگر به سمت راست انتقال می‌دهیم.

$$h(x)=f(\frac{1}{2}x-2)\xrightarrow{\text{انتقال ۴ واحد به راست}}h(x-4)=f(\frac{1}{2}(x-4)-2)$$

$$=f(\frac{1}{2}x-2-2)=f(\frac{1}{2}x-4)$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۸۳- **گزینهٔ «۳»** *(علی شهرابی)*

با توجه به دامنه و برد، نتیجه می‌گیریم f روی خط گذرنده از دو نقطهٔ $(-21,7)$ و $(4,-3)$ قرار دارد.

ضابطهٔ f را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{7-(-3)}{-21-4}=\frac{-2}{5}$$

$$f(x)=-\frac{2}{5}x+b\xrightarrow{(4,-3)}-3=-\frac{8}{5}+b\Rightarrow b=-\frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{2}{5}x-\frac{7}{5}\Rightarrow f(1)=-\frac{9}{5}\Rightarrow 3f(1)=-\frac{27}{5}=-5/4$$

$$\Rightarrow [3f(1)]=[-5/4]=-6$$

(ریاضی۱- تابع، صفحهٔ ۱۰۳)

۸۴- **گزینهٔ «۲»** *(عادل حسینی)*

ضابطهٔ تابع همانی f را به صورت $f(x)=x$ و ضابطهٔ تابع ثابت g را به صورت $g(x)=k$ در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\frac{3f(g(2))-g(f(-1))}{f(3)-2g(0)}=\frac{3f(k)-g(-1)}{3-2k}=\frac{3k-k}{3-2k}$$

$$=\frac{2k}{3-2k}=2\Rightarrow k=1$$

پس تابع ثابت g به صورت $g(x)=1$ است.

$$\Rightarrow g(0)=1$$

(ریاضی۱- تابع، صفحه‌های ۱۰۹ تا ۱۱۳)

۸۵- **گزینهٔ «۲»** *(حمیدرضا نوش‌کاران)*

برای اینکه رابطهٔ داده شده یک تابع باشد، باید $m-2$ و m^2-8 برابر باشند: (زیرا مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتبی هستند که مؤلفه‌های اول برابر دارند.)

$$m^2-8=m-2\Rightarrow m^2-m-6=0$$

$$\Rightarrow (m-3)(m+2)=0\Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

دقت کنید که به ازای $m=-2$، دو زوج مرتب $(2,1)$ و $(2,-4)$ عضو مجموعه خواهند شد، بنابراین f نمی‌تواند تابع باشد، پس تابع f به صورت زیر است:

$$f=\{(-2,1),(2,1),(7,1)\}$$

برد تابع f، $\mathbb{R}_f=\{1\}$ است و فقط یک عضو دارد.

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۸)

۸۶- **گزینهٔ «۳»** *(علی سلامت)*

محیط مستطیل برابر ۱۲ است، بنابراین:

$$2(x+y)=12\Rightarrow x+y=6\Rightarrow y=6-x$$

همچنین قطر مستطیل از رابطهٔ $d^2=x^2+y^2$ به دست می‌آید. برای اینکه قطر مستطیل را به عنوان تابعی از طول آن بنویسیم، در رابطهٔ اخیر قرار می‌دهیم: $y=6-x$.

$$d^2=x^2+y^2\xrightarrow{y=6-x}d^2=x^2+(6-x)^2$$

$$\Rightarrow d^2=2x^2-12x+36\Rightarrow d=\sqrt{2x^2-12x+36}$$

(ریاضی- تابع، صفحهٔ ۱۰۲)

۸۷- **گزینهٔ «۲»** *(شاهین پروازی)*

عبارت زیر رادیکال را بزرگتر از صفر در نظر می‌گیریم (به دلیل اینکه مخرج، نباید برابر صفر شود.):

$$D_g:-(f(x))^2-f(x)+2>0\Rightarrow (f(x))^2+f(x)-2<0$$

$$\Rightarrow (f(x)+2)(f(x)-1)<0\Rightarrow -2<f(x)<1$$

این مجموعه شامل ۵ عدد صحیح است. $\Rightarrow x\in(-4,3)-\{1\}$ با توجه به نمودار

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

www.kanoon.ir

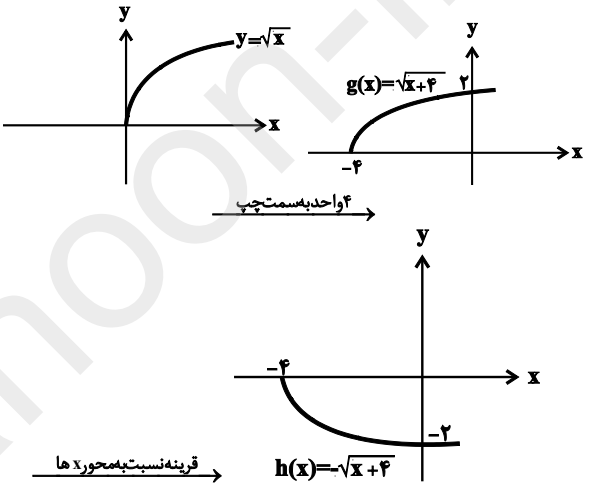
@physicsjeiroodi

۸۸- **گزینهٔ «۱»** *(کاظم اجلالی)*

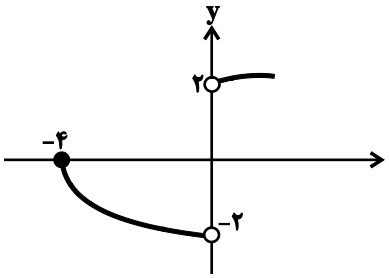
ضابطهٔ تابع f را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+4} & ;x>0\\ -\sqrt{x+4} & ;-4\le x<0\end{cases}$$

نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ۴ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $g(x)=\sqrt{x+4}$ به دست آید. سپس این نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $h(x)=-\sqrt{x+4}$ به دست آید. حال از نمودار تابع g قسمتی را که سمت راست محور y قرار دارد انتخاب می‌کنیم و از نمودار تابع h قسمتی را که در شرط $-4\le x<0$ صدق می‌کند، انتخاب می‌کنیم.



پس نمودار تابع f به صورت زیر است:



برد این تابع مجموعهٔ $(-2,0]\cup(2,+\infty)$ است.

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

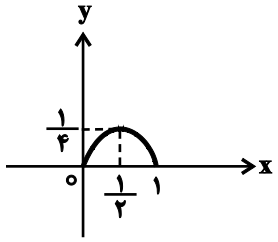
۸۹- **گزینهٔ «۴»** *(سعید علم‌پور)*

ابتدا دامنهٔ تابع را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{1-x}{x}\ge 0\Rightarrow 0<x\le 1\Rightarrow D_y=(0,1]$$

$$y=x\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{x^2\left(\frac{1-x}{x}\right)}=\sqrt{x-x^2}$$

اگر فرض کنیم $g(x)=x-x^2$ باشد، نمودار تابع g در بازهٔ $(0,1]$ قسمتی از یک سهمی به صورت شکل زیر است:

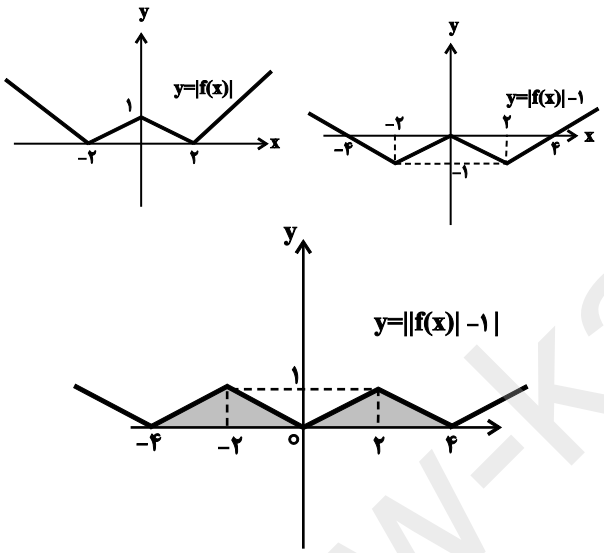


یعنی g همهٔ مقادیر بازهٔ $[0,\frac{1}{4}]$ را می‌پذیرد، پس تابع $y=\sqrt{g(x)}$ همهٔ مقادیر بازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ را می‌پذیرد.

$$\Rightarrow R_y=[0,\frac{1}{2}]$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۶ تا ۴۸)

۹۰- **گزینهٔ «۲»** *(حمید علیزاده)*



$$\Rightarrow S_{\text{هاشورخورده}}=2\ (\text{مساحت مثلث})=2(\frac{1}{2}\times 4\times 1)=4$$

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۷)

۹۱- **گزینهٔ «۲»** *(مهدی ملارمضانی)*

با ساده کردن f داریم:

$$f(x)=\frac{x[2x]}{\sqrt{x^2}}=\frac{x[2x]}{|x|}=\begin{cases}\frac{x[2x]}{x} & ;x>0\\ \frac{x[2x]}{-x} & ;x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[2x] & ;x>0\\ -[2x] & ;x<0\end{cases}$$

با برابر قرار دادن دو تابع f و g داریم:

اگر $x>0$ باشد: $\quad (I)$

$$[2x]=1\Rightarrow 1\le 2x<2\Rightarrow \frac{1}{2}\le x<1$$

اگر $x<0$ باشد: $\quad (II)$

$$[2x]=-1\Rightarrow -1\le 2x<0\Rightarrow -\frac{1}{2}\le x<0$$

$$\xrightarrow{(I)\cup(II)} x\in=[-\frac{1}{2},0)\cup[\frac{1}{2},1)=[-\frac{1}{2},1)-[0,\frac{1}{2})$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۱ تا ۴۳ و ۴۸ تا ۵۲)

www.kanoon.ir

@physicsjeiroodi

۹۲- **گزینهٔ «۴»** *(کاظم اجلالی)*

ابتدا توجه کنید که ضابطهٔ توابع g و h به صورت زیر است:

$$g(x)=f(x-k)=x-k-[۲(x-k)]=x-k-[۲x-۲k]$$

$$h(x)=f(x)+k=x-[۲x]+k$$

اگر $۲k$ عددی صحیح باشد، داریم:

$$g(x)=x-k-[۲x]+۲k=x-[۲x]+k$$

یعنی نمودار تابع g بر نمودار تابع h منطبق می‌شود. بنابراین k برابر ۱، ۲ و $\frac{۱}{۲}$ می‌تواند باشد، ولی برابر $\frac{۱}{۴}$ نمی‌تواند باشد.

توجه کنید که به ازای $k=\frac{۱}{۴}$ داریم:

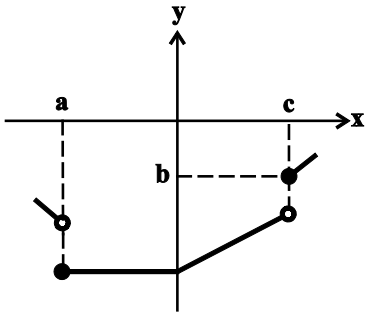
$$\begin{cases} g(۰)=۰-\frac{۱}{۴}-[۰-\frac{۱}{۲}]=\frac{۳}{۴} \\ h(۰)=۰-[۰]+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow g(۰)\neq h(۰)$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۹۳- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

برای رسم نمودار تابع f، دامنهٔ آن را به بازه‌هایی تقسیم می‌کنیم که عبارت $۲x$، بین دو مقدار صحیح متوالی قرار بگیرد:

$$\begin{cases} -۱\leq ۲x<۰\Rightarrow [۲x]=-۱\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\leq x<۰ ; f(x)=\frac{x-۱}{-x+۱}=-۱ \\ ۰\leq ۲x<۱\Rightarrow [۲x]=۰\Rightarrow ۰\leq x<\frac{۱}{۲} ; f(x)=\frac{x-۱}{۱}=x-۱ \end{cases}$$



با توجه به ضابطه‌های بالا و نمودار f، مشخص است که $a=-\frac{۱}{۲}$ و $c=\frac{۱}{۲}$ است. هم‌چنین برای محاسبهٔ b، باید $f(c)$ را محاسبه کنیم:

$$b=f(c)=f(\frac{۱}{۲})=\frac{\frac{۱}{۲}-۱}{[۱]\frac{۱}{۲}+۱}=-\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ab=\frac{۱}{۶}$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۹۴- **گزینهٔ «۳»** *(عادل حسینی)*

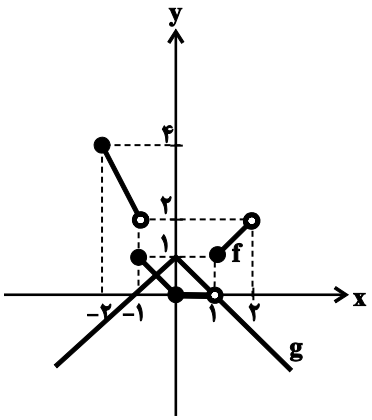
راه اول: نمودارهای دو تابع $f(x)=[x]x$ و $g(x)=۱-|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$-۲\leq x<-۱ : f(x)=-۲x$$

$$-۱\leq x<۰ : f(x)=-x$$

$$۰\leq x<۱ : f(x)=۰$$

$$۱\leq x<۲ : f(x)=x$$



با توجه به شکل فوق، نمودارهای دو تابع f و g فقط در یک نقطه متقاطع‌اند، بنابراین معادلهٔ صورت سؤال یک جواب دارد. دقت کنید که $f(۱)=۱$ است.

راه دوم:

واضح است که اگر $x\geq ۰$ باشد، $[x]\geq ۰$ و در نتیجه $x[x]\geq ۰$ است و اگر $x<۰$ باشد، $[x]<۰$ و در نتیجه $x[x]>۰$ است، بنابراین در هر حالت $x[x]\geq ۰$ خواهد بود، برای این‌که معادله جواب داشته باشد، باید $۱-|x|\geq ۰$ یعنی $-۱\leq x\leq ۱$ باشد. حال اگر $۰\leq x<۱$ باشد، معادله به صورت $x-۱=۰$ درمی‌آید که جواب ندارد. اگر $-۱\leq x<۰$ باشد، معادله به صورت $-x=۱+x$ در می‌آید که جواب آن $x=-\frac{۱}{۲}$ است و اگر $x=۱$ باشد، معادله به صورت $۱-۱=۱$ در می‌آید که برقرار نیست. پس تنها جواب معادله (طول تنها نقطهٔ مشترک دو نمودار) $x=-\frac{۱}{۲}$ است.

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۲)

۹۵- **گزینهٔ «۴»** *(حمیدرضا نوش‌کاران)*

نقطهٔ $A=(۲,-۱)$ روی تابع $y=-f(۲x)+۱$ است، پس:

$$-f(۴)+۱=-۱\Rightarrow f(۴)=۲$$

حال نقطهٔ متناظر آن روی $y=۲f(۳x-۲)-۲$ را به صورت زیر می‌یابیم:

$$۳x-۲=۴\Rightarrow x=۲$$

$$y=۲f(۴)-۲=(۲\times ۲)-۲=۲$$

پس نقطهٔ متناظر آن $A'=(۲,۲)$ است. که مجموع طول و عرض آن برابر ۴ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

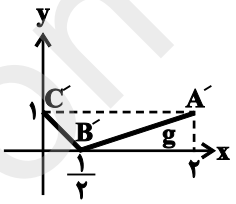
www.kanoon.ir

@physicsjeiroodi

۹۶- **گزینهٔ «۴»** (عادل حسینی)

روش اول: نمودار تابع f را ابتدا یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y_1=f(x+1)$ به دست آید، سپس طول نقاط آن را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار $y_2=f(2x+1)$ به دست آید، سپس برای به دست آوردن نمودار تابع $y_3=-f(-2x+1)$، نمودار y_2 را نسبت به مبدأ مختصات (قرینه نسبت به هر دو محور طول و عرض) قرینه می‌کنیم. در انتها نمودار y_3 را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید.

روش دوم (مشابه روش سؤال قبل): نقاط $A(-3,0)$، $B(0,1)$ و $C(1,0)$ روی نمودار تابع f به نقاط $A'(2,1)$، $B'(\frac{1}{2},0)$ و $C'(0,1)$ روی نمودار تابع g متناظر می‌شود. با وصل کردن نقاط A'، B' و C' نمودار g حاصل می‌شود.



(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۹۷- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

مراحل را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{و یک واحد به پایین}]{\text{قرینه نسبت به محور y}}y=\sqrt{-x}-1$$

$$\xrightarrow[\text{نسبت به محور x}]{\text{قرینهٔ نقاط با عرض مثبت}}y=-|\sqrt{-x}-1|$$

$$\xrightarrow[\text{به راست}]{\text{انتقال یک واحد}}g(x)=-|\sqrt{-(x-1)}-1|=-|\sqrt{1-x}-1|$$

دقت کنید که اگر بخواهیم نقاط با عرض منفی را در نمودار f نسبت به محور x قرینه کنیم، از تبدیل $|f(x)|$ استفاده می‌کنیم. برای قرینه کردن نقاط با عرض مثبت نیز از تبدیل $-|f(x)|$ استفاده می‌کنیم.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۹۸- **گزینهٔ «۲»** (علی سلامت)

ابتدا نمودار تابع $g(x)$ را ۴ واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم.

$$g(x)=f(\frac{1}{2}x-2)+1\xrightarrow{x\to x+4}g(x+4)=f(\frac{1}{2}(x+4)-2)+1$$

$$=f(\frac{1}{2}x+2-2)+1=f(\frac{1}{2}x)+1$$

حال نمودار حاصل را ۳ واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

$$y=f(\frac{1}{2}x)+1\xrightarrow{y\to y-3}h(x)=f(\frac{1}{2}x)+1-3=f(\frac{1}{2}x)-2$$

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۹۹- **گزینهٔ «۳»** (عادل حسینی)

ابتدا ضابطهٔ g را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=(x+1)^2\xrightarrow{\text{طول نقاط دو برابر می‌شود.}}y=(\frac{x}{2}+1)^2$$

$$\xrightarrow[\text{یک واحد به چپ}]{\text{یک واحد به پایین}}g(x)=(\frac{x+1}{2}+1)^2-1$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{(x+3)^2}{4}-1$$

$$\xrightarrow{f(x)=g(x)}x^2+2x+1=\frac{x^2+6x+9}{4}-1$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=\frac{x^2+6x+5}{4}$$

$$\Rightarrow 4x^2+8x+4=x^2+6x+5$$

$$\Rightarrow 3x^2+2x-1=0$$

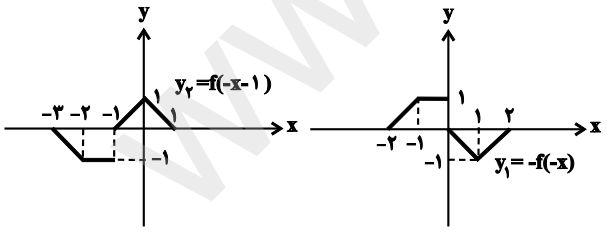
معادلهٔ بالا دو جواب حقیقی دارد که مجموع آن‌ها برابر $-\frac{2}{3}$ است. پس مجموع طول نقاط برخورد نمودارهای f و g برابر $-\frac{2}{3}$ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

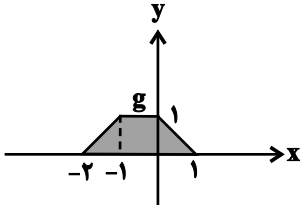
۱۰۰- **گزینهٔ «۱»** (عادل حسینی)

ابتدا نمودار توابع $y_1=-f(-x)$ و $y_2=f(-x-1)$ را رسم می‌کنیم. سپس از y_1 قسمت سمت چپ محور y و از y_2 قسمت راست محور y را نگه می‌داریم تا نمودار g حاصل شود.

دقت کنید که y_1 قرینهٔ نمودار تابع f نسبت به مبدأ مختصات است. برای y_2 نیز، ابتدا f را یک واحد به راست می‌بریم، سپس آن را نسبت به محور y قرینه می‌کنیم. داریم:



پس نمودار تابع g مطابق شکل زیر است:



مساحت ذوزنقهٔ هاشورخورده برابر $S=(\frac{3+1}{2})\times 1=2$ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

www.kanoon.ir

@physicsjeiroodi

حسابان ۲ (گواه)

۱۰۱- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

$$(۳,m^۲)=(۳,m+۲)\Rightarrow m^۲=m+۲$$

$$\Rightarrow m^۲-m-۲=(m-۲)(m+۱)=۰$$

$$\Rightarrow m=۲\ ,\ m=-۱$$

با جای‌گذاری این مقادیر m و تشکیل رابطه داریم:

$$(۱)\ m=-۱: A=\{(۳,۱),(۲,۱),(-۳,-۱),(-۲,-۱),(۳,۱),(-۱,۴)\}$$

A به ازای $m=-۱$ تابع است.

$$(۲)\ m=۲: A=\{(۳,۴),(۲,۱),(-۳,۲),(-۲,۲),(۳,۴),(۲,۴)\}$$

به ازای $m=۲$ تابع نیست. بنابراین فقط $m=-۱$ قابل قبول است.

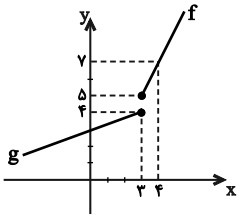
(ریاضی۱- تابع، صفحه‌های ۹۴ تا ۱۰۰)

۱۰۲- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

نمودار توابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$$f(x)=۲x-۱,\ D_f=[۳,+\infty)\qquad \begin{array}{c|cc} x & ۳ & ۴ \\ \hline f(x) & ۵ & ۷ \end{array}$$

$$g(x)=\frac{۱}{۳}x+۳\ ,\ D_g=(-\infty,۳]\qquad \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۳ \\ \hline g(x) & ۳ & ۴ \end{array}$$



با توجه به نمودار توابع f و g، اجتماع برد دو تابع f و g برابر است با $\mathbb{R}-(۴,۵)$.

(ریاضی ۱- تابع، صفحه‌های ۱۰۱ تا ۱۰۸)

۱۰۳- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

تنها در صورتی دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x+۴}{۲x^۲-ax+b-۵}$ به صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ است که مخرج کسر، ریشهٔ مضاعف $x=۲$ داشته باشد. پس با توجه به ضریب $x^۲$ در مخرج کسر، ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{x+۴}{۲(x-۲)^۲}=\frac{x+۴}{۲x^۲-۸x+۸}=\frac{x+۴}{۲x^۲-ax+b-۵}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a=-۸\Rightarrow a=۸\\ b-۵=۸\Rightarrow b=۱۳\end{cases}\Rightarrow a+b=۲۱$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

۱۰۴- **گزینهٔ «۱»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

$$x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۰$$

$$-۱<x<۰\Rightarrow\begin{cases}[x]=-۱\\ ۰<x^۲<۱\Rightarrow[x^۲]=۰\\ -۱<x^۳<۰\Rightarrow[x^۳]=-۱\\ ۰<x^۴<۱\Rightarrow[x^۴]=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴]=-۱+۰-۱+۰=-۲$$

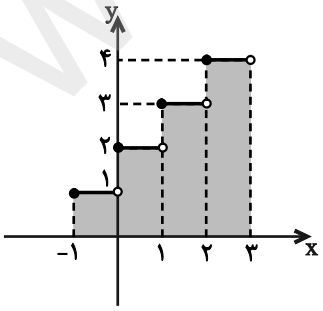
(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

۱۰۵- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

ابتدا نمودار تابع را در فاصلهٔ $(۳,-۱]$ رسم می‌کنیم. توجه کنید که:

$$[x+۲]=[x]+۲$$

$$\begin{cases}-۱\le x<۰\Rightarrow y=[x]+۲=-۱+۲=۱\\ ۰\le x<۱\Rightarrow y=[x]+۲=۰+۲=۲\\ ۱\le x<۲\Rightarrow y=[x]+۲=۱+۲=۳\\ ۲\le x<۳\Rightarrow y=[x]+۲=۲+۲=۴\end{cases}$$



مساحت بین نمودار و محور xها برابر با مساحت قسمت سایه‌زده شده است، بنابراین:

$$S=۱\times۱+۱\times۲+۱\times۳+۱\times۴=۱۰$$

(حسابان ۱- تابع، صفحه‌های ۴۹ تا ۵۲)

www-kanoon-ir

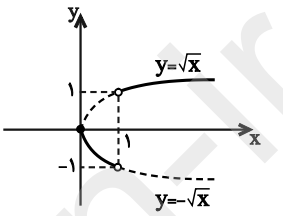
@physicsjeiroodi

۱۰۶- **گزینهٔ «۳»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

معادلهٔ تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & ;x>1\\ \dfrac{-(x-1)\sqrt{x}}{x-1} & ;0\le x<1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ;x>1\\ -\sqrt{x} & ;0\le x<1\end{cases}$$

دقت کنید که $x=1$ ریشهٔ مخرج است و در دامنهٔ معادله قرار ندارد. بنابراین، نمودار تابع به شکل زیر است:



(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۰۷- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

با استفاده از نمودار تابع f، ابتدا نمودار تابع $y=f(1+x)$ را رسم می‌کنیم که با یک واحد انتقال به چپ به‌دست می‌آید. سپس با تبدیل x به $-x$ به نمودار $y=f(1-x)$ می‌رسیم که قرینهٔ نمودار $y=f(1+x)$ نسبت به محور y هاست و در نهایت $y=2f(1-x)$ را رسم می‌کنیم که با انبساط در راستای محور y ها به دست می‌آید.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۰۸- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

دامنهٔ تابع f بازهٔ $D_f=[-1,4]$ است، پس برای به‌دست آوردن برای دامنهٔ تابع $g(x)=-3f(\frac{-x}{2}+2)$ باید مقدار $\frac{-x}{2}+2$ در بازهٔ $[-1,4]$ قرار داشته باشد:

$$\left(\frac{-x}{2}+2\right)\in[-1,4]\Rightarrow -1\le\frac{-x}{2}+2\le 4$$

$$\Rightarrow -3\le\frac{-x}{2}\le 2\Rightarrow -4\le x\le 6$$

$$\Rightarrow D_g=[-4,6]$$

بنابراین دامنهٔ تابع g شامل ۶ عدد طبیعی ۱ تا ۶ است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

۱۰۹- **گزینهٔ «۴»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

برای حل معادلهٔ $2f(2x)-1=k$ داریم:

$$2f(2x)-1=k\Rightarrow 2f(2x)=k+1\Rightarrow f(2x)=\frac{k+1}{2}$$

تعداد جواب‌های معادلهٔ فوق برابر با تعداد نقاط تلاقی خط $y=\frac{k+1}{2}$ با نمودار تابع $y=f(2x)$ است.

با توجه به نمودار، خط $y=0$ (محور x) نمودار تابع را در ۳ نقطه قطع می‌کند. بقیهٔ خطوط $y=m$ (خط موازی محور x) نمودار f را حداکثر در ۲ نقطه قطع می‌کنند.

$$\Rightarrow f(2x)=\frac{k+1}{2}=0\Rightarrow k=-1$$

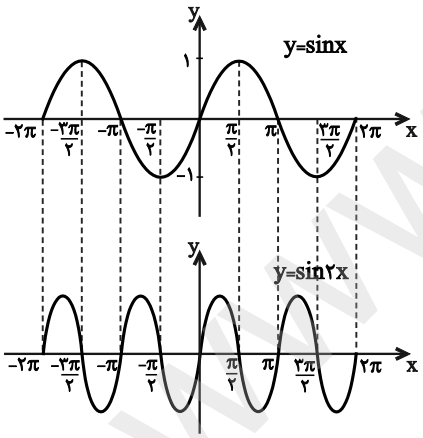
دقت کنید که نمودار $y=f(2x)$ از انقباض افقی نمودار f به دست می‌آید. این یعنی تعداد جواب‌های معادله $f(2x)=m$ و $f(x)=m$ یکسان است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

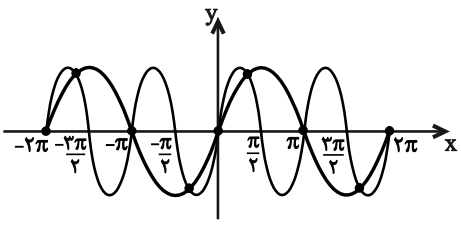
۱۱۰- **گزینهٔ «۲»** *(کتاب آبی ریاضیات کنکور رشتهٔ ریاضی)*

با تقسیم طول نقاط برخورد نمودار تابع $y=\sin x$ با محور x ها بر a، طول نقاط برخورد نمودار تابع $y=\sin ax$ با محور x ها به دست می‌آید، پس $a=2$ است.

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sin 2x$، کافی است طول نقاط تابع $y=\sin x$ را بر دو تقسیم کنیم.



دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. همانطور که مشاهده می‌شود، دو نمودار در ۹ نقطه مشترک‌اند.



توجه کنید که $a=-2$ نیز قابل قبول است.

(حسابان ۲- تابع، صفحه‌های ۱ تا ۱۲)