پاسخ تشریحی تابع

پاسخ تشریحی: حسین حاجیلو
فرهاد حامی، فرزانه دانایی

راهبرد حل تیپ (۱)

برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، باید توجه کنیم که به یک عضو، چند عضو نسبت داده می‌شود؛ اگر بیش از یک عضو نسبت داده شود، رابطه تابع نیست.

مثال: رابطه‌ای که به هر استان، مرکز آن استان نسبت داده می‌شود یک تابع است، ولی رابطه‌ای که به هر استان، شهرهای آن استان نسبت داده می‌شود، تابع نیست، زیرا هر استان، چندین شهر مختلف دارد ولی فقط یک مرکز دارد.

۸۰۱. **گزینه‌ی ۲**

الف) رابطه‌ی مادر با سه فرزند خود، تابع نیست. چون مجموعه‌ی اول (مادر)، به سه عضو از مجموعه‌ی دوم (فرزندان) نظیر می‌شود.

ب) رابطه‌ی فرزندان با مادر، تابع است. چون هر فرزند (مجموعه‌ی اول) تنها یک مادر (مجموعه‌ی دوم) دارد.

۸۰۲. **گزینه‌ی ۴**

گزینه‌ی (۱): هر فرد در یک زمان خاص، دارای یک وزن است. پس تابع خواهد بود.

گزینه‌ی (۲): هر فرد، در یک زمان خاص، نمی‌تواند بیش از یک سن داشته باشد.

گزینه‌ی (۳): هر فرد، در یک زمان خاص نمی‌تواند بیش از یک قد داشته باشد.

گزینه‌ی (۴): هر فرد می‌تواند به بیش از یک غذا علاقه داشته باشد، پس به هر عضو از مجموعه‌ی اول (فرد) می‌توان بیش از یک عضو از مجموعه‌ی دوم (غذاها) را نظیر کرد، پس این رابطه تابع نیست.

۸۰۳. **گزینه‌ی ۳**

گزینه‌ی (۱): تابع است، زیرا برای هر فرد، یک شماره‌ی کد ملی وجود دارد.

گزینه‌ی (۲): تابع است، زیرا به ازای هر شعاعی، یک مساحت برای دایره وجود دارد.

گزینه‌ی (۳): تابع نیست، چون کتاب ریاضی دهم دارای ۷ فصل است.

گزینه‌ی (۴): رابطه‌ای که طول یک فنر ثابت را به وزنه‌هایی که به آن وصل می‌شوند، نسبت می‌دهد، یک تابع است.

راهبرد حل تیپ (۲)

الف- رابطه را می‌توان با نمودار پیکانی یا مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش داد. برای تشخیص تابع بودن یک رابطه، به جدول زیر توجه کنید:

نمایش رابطه	تشخیص تابع بودن رابطه
نمودار پیکانی	دقیقاً یک پیکان از عضوهای مجموعه‌ی اول خارج شود.
زوج مرتبی	اگر مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب برابر باشند، باید مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشند.

* تذکر: دو زوج مرتب در صورتی برابرند که مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان با هم برابر باشند.

ب- اگر نمودار یک رابطه را داشته باشیم با آزمون خط قائم می‌توان تابع بودن رابطه را مشخص کرد. اگر هر خط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه نمودار یک تابع است.

پ- اگر زوج مرتب (a , b) متعلق به تابع f باشد، آنگاه:

$$(a , b) \in f \Rightarrow f(a) = b$$

اگر ضابطه‌ی تابع داده شده باشد، برای یافتن مقدار تابع به ازای یک عدد از دامنه کافی است آن عدد را به جای متغیر در ضابطه قرار داد.

۸۰۴. **گزینه‌ی ۳**

در نمودار پیکانی یک تابع باید از هر عضو مجموعه‌ی اول (آغاز) دقیقاً یک پیکان خارج شود.

در نمودار شکل (۱)، از هر عضو مجموعه‌ی اول، یک پیکان خارج شده، پس تابع است.

در نمودار شکل (۲)، از عضو x، دو پیکان خارج شده، پس تابع نیست.

نمودار شکل (۳)، تابع است زیرا از هر عضو مجموعه‌ی A، یک پیکان خارج شده است. دقت کنید که ممکن است به همه‌ی اعضای مجموعه‌ی B پیکانی وارد نشود.

نمودار شکل (۴) نیز تابع نیست، زیرا از عضو z، از مجموعه‌ی A، پیکانی خارج نشده است.

۸۰۵. **گزینه‌ی ۲**

برای آنکه نمودار پیکانی، نمایش یک تابع باشد باید از هر عضو مجموعه‌ی اول فقط یک پیکان خارج شود. بنابراین در نمودار پیکانی داده شده باید $۲a+b=۵$ و $a^۲-b^۲=۳$ باشد تا از عضوهای ۲ و ۱ در مجموعه‌ی اول، یک پیکان خارج شود:

$$\begin{cases} ۲a+b=۵ \Rightarrow b=۵-۲a \quad (۱) \\ a^۲-b^۲=۳ \xrightarrow{(۱)} a^۲-(۵-۲a)^۲=۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^۲-(۲۵+۴a^۲-۲۰a)=۳$$

$$\Rightarrow ۳a^۲-۲۰a+۲۸=۰ \Rightarrow (۳a-۱۴)(a-۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۲ \xrightarrow{(۱)} b=۱ \\ a=\frac{۱۴}{۳} \xrightarrow{(۱)} b=-\frac{۱۳}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=۳ \\ a+b=\frac{۱۴}{۳}-\frac{۱۳}{۳}=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

که فقط $a+b=\frac{۱}{۳}$ در گزینه‌ها می‌باشد.

۸۰۶. **گزینه‌ی ۲**

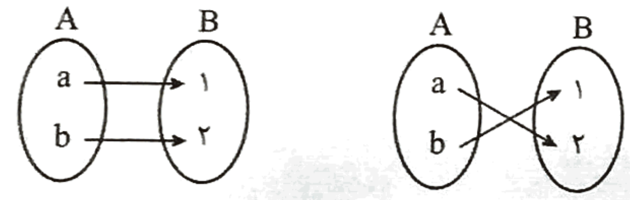
نمودار پیکانی یک تابع دارای دو ویژگی زیر است:

الف- از همه‌ی اعضای مجموعه‌ی A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

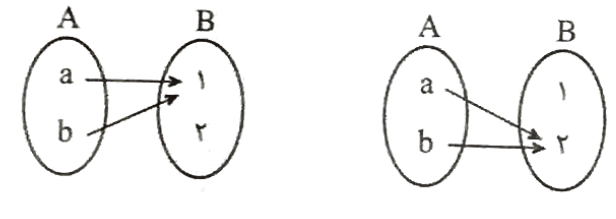
ب- می‌تواند به تعدادی از اعضای مجموعه‌ی B بیش از یک پیکان وارد شود یا پیکانی وارد نشود.

بنابراین فقط در دو حالت زیر تابع خواهیم داشت:

حالت اول: وقتی دو عضو مجموعه‌ی اول به دو عضو مجموعه‌ی دوم بروند:



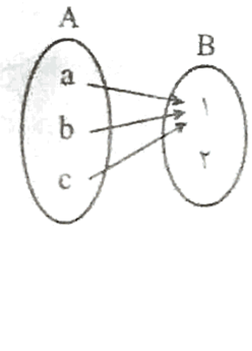
حالت دوم: وقتی دو عضو مجموعه‌ی اول به یک عضو مجموعه‌ی دوم بروند:



پس در کل ۴ تابع به‌دست می‌آید.

۸۰۷. **گزینه‌ی ۱**

با توجه به توضیحات تست قبل در تعریف نمودار پیکانی تابع، مطابق شکل زیر فقط یک تابع وجود دارد.



۸۰۸. گزینه‌ی ۳

در سه زوج مرتب گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) با فرض $a=0$ و $b=0$، برابری حاصل می‌شود اما در گزینه‌ی (۳) داریم:

$$\begin{cases} a^2 = 4-2a^2 \\ b^2 = -1-3b^2 \Rightarrow 4b^2=-1 \to \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

۸۰۹. گزینه‌ی ۳

چون این تابع شامل یک زوج مرتب است، پس تمامی مؤلفه‌های اول با هم و مؤلفه‌های دوم نیز با هم برابرند:

مؤلفه‌های اول: $m^2-m=2 \Rightarrow m^2-m-2=0$

$$\Rightarrow (m+1)(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

مؤلفه‌های دوم: $m^2-3m=n^2-2n+5=p$

اگر $m=-1$ باشد:

$$m=-1 \Rightarrow m^2-3m=4=n^2-2n+5=p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2-2n+1=0 \Rightarrow (n-1)^2=0 \Rightarrow n=1 \\ p=4 \end{cases}$$

اگر $m=2$ باشد:

$$m=2 \Rightarrow m^2-3m=-2=n^2-2n+5=p$$

$\Rightarrow n^2-2n+7=0 \to \Delta=-24<0 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد.

$\Rightarrow m=2$ غ ق ق

بنابراین: $m+n+p=-1+1+4=4$

۸۱۰. گزینه‌ی ۲

برای آنکه رابطه‌ی A یک تابع باشد، باید در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه‌ی اول برابر نداشته باشند، بنابراین:

$$(3,m^2)=(3,m+2) \Rightarrow m^2=m+2$$

$$\Rightarrow m^2-m-2=0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1)=0 \Rightarrow m=2\,,\, m=-1$$

با جاگذاری این مقادیر m و تشکیل رابطه داریم:

(1) $m=-1$

$$\Rightarrow A=\{(3,1),(2,1),(-3,-1),(-2,-1),(3,1),(-1,4)\}$$

پس به ازای $m=-1$ تابع است.

(2) $m=2$

$$\Rightarrow A=\{(3,4),(2,1),(-3,2),(-2,2),(3,4),(2,4)\}$$

پس به ازای $m=2$ تابع نیست. بنابراین فقط $m=-1$ قابل قبول است.

۸۱۱. گزینه‌ی ۴

برای آن‌که رابطه‌ای تابع باشد، هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه‌های اول برابر داشته باشند. بنابراین:

$$(1,2)=(1,m^2+m) \Rightarrow m^2+m=2$$

$$\Rightarrow m^2+m-2=0 \Rightarrow (m+2)(m-1)=0$$

$\Rightarrow m=-2$ یا $m=1$

$m=1 \Rightarrow f=\{(1,2),(1,1),(-1,2)\}$:تابع نیست

$$m=-2 \Rightarrow f=\{(1,2),(-2,1),(2,-1)\}$$

$$\Rightarrow (1,-2) \notin f$$

۸۱۲. گزینه‌ی ۲

در یک تابع، اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر باشند، مؤلفه‌های دوم نیز باید برابر باشند، بنابراین:

$$F=\{(2a-b,3),(2,-1),(\underline{5},3),(3,5),(\underline{5},a-b)\}$$

$$\Rightarrow a-b=3$$

ولی معادله‌ی دیگری نمی‌توانیم پیدا کنیم، پس هر چهار گزینه را به ترتیب امتحان می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $(a,b)=(1,-3) \Rightarrow a-b=1+3=4$

در شرط $a-b=3$ صدق نمی‌کند.

گزینه‌ی (۲): $(a,b)=(-4,-7) \Rightarrow \begin{cases} a-b=-4+7=3 \\ 2a-b=-8+7=-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow F=\{(-1,3),(2,-1),(5,3),(3,5)\}$$

تابع است.

گزینه‌ی (۳): $(a,b)=(-1,-4) \Rightarrow \begin{cases} a-b=-1+4=3 \\ 2a-b=-2+4=2 \end{cases}$

$$\Rightarrow (2,3) \in F \;,\; (2,-1) \in F$$

تابع نیست.

گزینه‌ی (۴): $(a,b)=(0,-3) \Rightarrow \begin{cases} a-b=0+3=3 \\ 2a-b=0+3=3 \end{cases}$

$$\Rightarrow (3,3) \in F \;,\; (3,5) \in F$$

تابع نیست.

۸۱۳. گزینه‌ی ۴

برای آنکه رابطه‌ای تابع باشد، نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه‌ی اول برابر داشته باشند، بنابراین:

$$(1,a^2+1)=(1,5) \Rightarrow a^2+1=5 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$$

$$a=2 \Rightarrow R=\{(1,5),(3,b-1),\underline{(2,3)},\underline{(2,1)},(3,1)\}$$

تابع نیست.

پس تنها $a=-2$ قابل قبول است.

$$(3,1)=(3,b-1) \Rightarrow b-1=1 \Rightarrow b=2$$

بنابراین: $a+b=-2+2=0$

۸۱۴. گزینه‌ی ۲

در یک تابع، اگر دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول برابر وجود داشته باشد، مؤلفه‌های دوم نیز باید برابر باشند، پس:

$$(7,m^2-4m)=(7,5) \Rightarrow m^2-4m=5$$

$$\Rightarrow m^2-4m-5=0 \Rightarrow (m-5)(m+1)=0$$

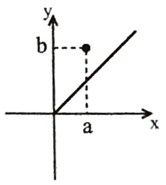
$$\Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=5 \end{cases}$$

به ازای $m=-1$ دو زوج مرتب $(-1,2)$ و $(-1,6)$ را خواهیم داشت که شرط تابع بودن را برآورده نمی‌کنند، پس $m=5$ قابل قبول است. بنابراین: $f=\{(-1,2),(7,5),(5,6),(2,5)\}$

اگر نقطه‌ی (a,b) بالای نیمساز ناحیه‌ی اول باشد، آنگاه:

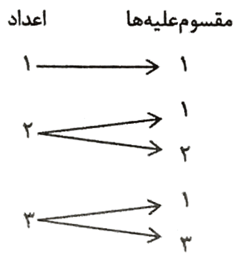
الف) a و b مثبت‌اند.

ب) $a<b$.



بنابراین تنها دو نقطه‌ی $(2,5)$ و $(5,6)$ این شرایط را دارند.

۸۱۵. گزینه‌ی ۲



$(1,1)$

$(2,1),(2,2)$

$(3,1),(3,3)$

$R=\{(۱,۱),(\underline{۲},۱),(\underline{۲},۲),(\underline{\underline{۳}},۱),(\underline{\underline{۳}},۳)\}$

با توجه به رابطه‌ی بالا، از میان $(\underline{۲},۱)$ و $(\underline{۲},۲)$ یک زوج مرتب و از میان $(\underline{\underline{۳}},۱)$ و $(\underline{\underline{۳}},۳)$ نیز یک زوج مرتب باید حذف شود. پس با حذف حداقل ۲ زوج مرتب، R به یک تابع تبدیل می‌شود.

۸۱۶. گزینه‌ی ۳

در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) خطی موازی محور yها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، بنابراین تابع نیستند و گزینه‌ی (۳) نمودار یک تابع است.

۸۱۷. گزینه‌ی ۲

باید حداقل دو نقطه از نمودار حذف گردد تا به یک تابع تبدیل شود، زیرا در نقاطی به طول‌های ۱ و ۱−، دو مقدار برای y تعریف شده است.

۸۱۸. گزینه‌ی ۳

چهار تابع تک‌نقطه‌ای $\{A\}$، $\{B\}$، $\{C\}$ و $\{D\}$ و چهار تابع دو نقطه‌ای $\{A,C\}$، $\{A,D\}$، $\{B,C\}$ و $\{B,D\}$ را می‌توان مشخص کرد. پس در مجموع ۸ تابع می‌توان مشخص کرد.

۸۱۹. گزینه‌ی ۲

در زوج‌های مرتب یک رابطه، اگر مؤلفه‌های اول برابر باشند، آن‌گاه رابطه وقتی تابع است که مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشند، یعنی داریم:

$$(-۱,۱)=(-۱,a+۲)\Rightarrow a+۲=۱\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین:

$$f=\{(-۱,۱),(۰,-۱)\}$$

$$\frac{af(-۱)}{k+۲f(۰)}=۲\xrightarrow{a=-۱}\frac{-۱\times۱}{k+۲(-۱)}=۲$$

$$\Rightarrow\frac{-۱}{k-۲}=۲\Rightarrow ۲k-۴=-۱\Rightarrow ۲k=۳\Rightarrow k=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

۸۲۰. گزینه‌ی ۴

ابتدا با قرار دادن $۲x+۱=۳$ در تساوی داده شده، مقدار $f(۳)$ را می‌یابیم:

$$f(۲x+۱)+f(۳)=۵x-۱$$

$$\xrightarrow[\Rightarrow x=۱]{۲x+۱=۳}f(۲+۱)+f(۳)=۵-۱\Rightarrow ۲f(۳)=۴$$

$$\Rightarrow f(۳)=۲$$

حال با قرار دادن $۲x+۱=۵$ (در نتیجه $x=۲$) در تساوی، مقدار $f(۵)$ را می‌یابیم:

$$\xrightarrow[\Rightarrow x=۲]{۲x+۱=۵}f(۵)+f(۳)=۵(۲)-۱\Rightarrow f(۵)=۹-۲=۷$$

راهبرد حل تیپ (۳)

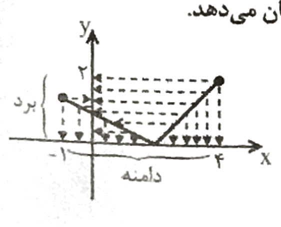
الف- دامنه و برد تابع در نمایش نمودار پیکانی و زوج مرتبی تابع به صورت زیر مشخص می‌شود:

نمایش رابطه	اعضای دامنه	اعضای برد
زوج مرتبی	مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها	مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها
نمودار پیکانی	همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی اول	عضوهایی از مجموعه‌ی دوم که پیکان به آن‌ها وارد می‌شود.

• نکته: تعداد اعضای دامنه همواره بزرگتر یا مساوی تعداد اعضای برد است زیرا در غیر این صورت تابع نخواهیم داشت.

ب- در نمایش نموداری تابع، تصویر نمودار بر محور xها، دامنه‌ی تابع و تصویر نمودار بر محور yها، برد تابع را نشان می‌دهد.

مثال:



$D=[-۱,۴]$

$R=[۰,۲]$

۸۲۱. گزینه‌ی ۳

f تابع است، پس:

$$\begin{cases}(۵,a-۲)\in f\\(۵,۳)\in f\end{cases}\Rightarrow a-۲=۳\Rightarrow a=۵$$

از طرفی:

$$\begin{cases}(۳,۵)\in f\\(a-۲,b+۳)=(۳,b+۳)\in f\end{cases}$$

$$\Rightarrow b+۳=۵\Rightarrow b=۲$$

$$\Rightarrow f=\{(۴,۲),(۵,۳),(۳,۵),(۶,۴)\}$$

$$\Rightarrow \text{برد تابع } f=\{۲,۳,۵,۴\}$$

۸۲۲. گزینه‌ی ۲

چون رابطه‌ی R تابعی است که برد آن تک عضوی است، پس همه‌ی مؤلفه‌های دوم با هم برابرند.

$$۲a=a-۲b=-۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲a=-۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}\\a-۲b=-۱\Rightarrow-\frac{۱}{۲}-۲b=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow -۲b=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow a+b=-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۴}$$

۸۲۳. گزینه‌ی ۴

$$\text{دامنه‌ی تابع } f=\{a,۱,۲\}$$

$$\text{برد تابع } f=\{۲,a+b,۳\}$$

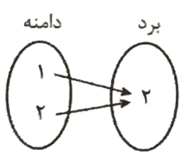
چون دامنه و برد برابرند، پس:

$$\begin{cases}a=۳\\a+b=۱\xrightarrow{a=۳}b=-۲\end{cases}$$

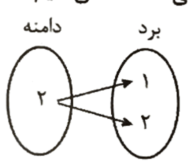
$$\Rightarrow ۳b+a=۳(-۲)+۳=-۳$$

۸۲۴. گزینه‌ی ۲

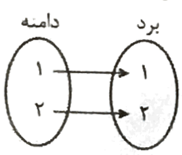
از نمودار پیکانی استفاده می‌کنیم:



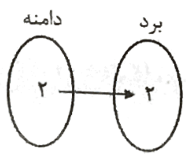
گزینه‌ی (۱): تابع است



گزینه‌ی (۲): تابع نیست



گزینه‌ی (۳): تابع است



گزینه‌ی (۴): تابع است

۸۲۵. گزینه‌ی ۲

برای هر گزینه مثالی می‌آوریم:

گزینه‌ی (۱): اگر دامنه تابع را مجموعه‌ی اعداد طبیعی و برد تابع را مجموعه‌ی $\{a\}$ در نظر بگیریم، در این حالت، رابطه‌ی R به صورت زیر خواهد بود که تابع است.

$$R=\{(۱,a),(۲,a),(۳,a),...\}$$

گزینه‌ی (۲): اگر دامنه را با $\{a\}$ و برد را با اعداد طبیعی نمایش دهیم، در این حالت، رابطه‌ی R به صورت زیر خواهد بود که تابع نیست.

$$R=\{(a,۱),(a,۲),(a,۳),...\}$$

گزینه‌ی (۳): اگر دامنه‌ی تابع را با اعداد طبیعی و برد تابع را با اعداد طبیعی نمایش دهیم، در این حالت، یکی از رابطه‌های R که تابع است به‌صورت زیر خواهد بود:

$$R=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),...\}$$

گزینه‌ی (۴): اگر دامنه‌ی تابع را با $\{a\}$ و برد تابع را با $\{a\}$ نمایش دهیم، در این حالت، رابطه‌ی R که تابع است به‌صورت زیر خواهد بود:

$$R=\{(a,a)\}$$

۸۲۶. گزینه‌ی ۱

باید تعداد اعضای دامنه، بزرگتر یا مساوی تعداد اعضای برد باشد، پس:

$$۲۹-۵n\ge ۳n+۷\Rightarrow ۸n\le ۲۲\Rightarrow n\le \frac{۲۲}{۸}$$

$$\xrightarrow{n\in N} n=۱ \text{ یا } n=۲$$

۸۲۷. گزینه‌ی ۳

با توجه به نمودار پیکانی، برد تابع تک عضوی و برابر با d است، بنابراین:

$$۳c=۲b=a=d$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(۲a,۳c)=(۲a,a)\\(۴a-۹c,۲b)=(۴a-۳a,a)=(a,a)\\(d^۲+۱,a)=(a^۲+۱,a)\end{cases}$$

$$R=\{(۲a,a),(a,a),(a^۲+۱,a)\}$$

برای آن‌که دامنه‌ی تابع R دارای ۲ عضو باشد، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$I)\ ۲a=a\Rightarrow a=۰$ غ.ق.ق — طبق فرض، a مثبت است.

$II)\ a^۲+۱=a\Rightarrow a^۲-a+۱=۰$

در این معادله $\Delta<۰$، پس معادله جواب ندارد.

$III)\ a^۲+۱=۲a\Rightarrow a^۲-۲a+۱=۰$

$$\Rightarrow(a-۱)^۲=۰\Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow R=\{(۲,۱),(۱,۱),(۲,۱)\}=\{(۱,۱),(۲,۱)\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}e=۲\\f=۱\end{cases} \text{ یا } \begin{cases}e=۱\\f=۲\end{cases}\Rightarrow e+f=۳$$

۸۲۸. گزینه‌ی ۲

نمایش زوج مرتبی تابع f به صورت زیر است:

$$f=\{(a-۱,۲),(۵,a-۲),(۵,۳),(a-۲,b+۳),(۳,۵)\}$$

مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابرند، پس باید مؤلفه‌های دوم آنها نیز برابر باشند:

$$(۵,a-۲)=(۵,۳)\Rightarrow a-۲=۳\Rightarrow a=۵$$

مقدار a را در تابع قرار می‌دهیم و آن را بازنویسی می‌کنیم:

$$f=\{(۴,۲),(۵,۳),(۳,b+۳),(۳,۵)\}$$

دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول برابر داریم، بنابراین:

$$(۳,b+۳)=(۳,۵)\Rightarrow b+۳=۵$$

پس تابع f برابر است با: $f=\{(۴,۲),(۵,۳),(۳,۵)\}$

دامنه و برد تابع f عبارتند از:

$$\begin{matrix}D_f=\{۴,۵,۳\}\\R_f=\{۲,۳,۵\}\end{matrix}\rightarrow \text{مجموعه‌ی اعضای غیر مشترک}=\{۲,۴\}$$

۸۲۹. گزینه‌ی ۳

در نمودار تابع گزینه‌ی (۳)، دامنه برابر با $[-۱,۱)-\{۰\}$ و برد برابر با $(-۱,۱)$ است، به دلیل وجود صفر در برد، برد تابع زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی آن نیست.

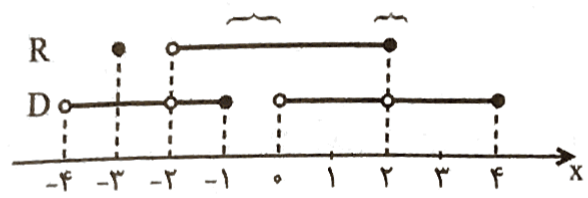
در بقیه‌ی گزینه‌ها، دامنه برابر با R است و برد آنها زیرمجموعه‌ی R می‌باشد.

۸۳۰. گزینه‌ی ۲

$$D=(-۴,-۲)\cup(-۲,-۱]\cup(۰,۲)\cup(۲,۴]$$

$$R=(-۲,۲]\cup\{-۳\}$$

R و D را روی محور اعداد نشان می‌دهیم:



پس:

$$R-D=(-۱,۰]\cup\{۲\}$$

$R-D$ شامل دو عدد صحیح صفر و ۲ است.

راهبرد حل تیپ (۴)

نمایش ضابطه‌ای تابع را می‌توانیم به‌صورت $\begin{cases}f:A\to B\\y=f(x)\end{cases}$ در نظر بگیریم.

در این نمایش، A دامنه‌ی تابع و B را هم‌دامنه‌ی آن می‌نامیم. برد تابع همواره زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی تابع است. یعنی:

$$R_f\subset B$$

در نمایش ضابطه‌ای تابع، می‌توان به جای مجموعه‌ی B (هم‌دامنه)، هر مجموعه‌ی دیگری که شامل برد تابع باشد را نیز در نظر گرفت.

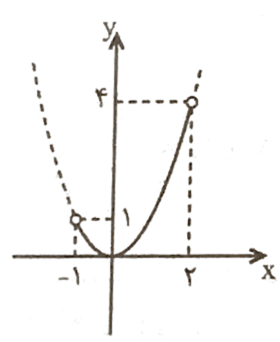
نکته: در بعضی از موارد می‌توانیم به طور مستقیم برد را با استفاده از روابط موجود بیابیم.

۱- در محاسبه‌ی برد تابع به نامنفی بودن عبارت‌های $|u|$ و $u^{۲n}$ و $\sqrt[۲n]{u}$ و $|u|-u$ توجه کنید.

۲- در محاسبه‌ی برد بعضی توابع می‌توانیم از اتحاد مربع کامل $u^۲+au=(u+\frac{a}{۲})^۲-\frac{a^۲}{۴}$ استفاده کنیم.

۸۳۱. گزینه‌ی ۳

با رسم نمودار $y=x^۲$ با شرط $-۱<x<۲$، متوجه می‌شویم که $۰\le y<۴$ و در نتیجه $R_H=[۰,۴)$.



۸۳۲. گزینه‌ی ۳

ابتدا ضابطه‌ی هر یک از تابع‌ها را به شکل مربع کامل تبدیل می‌کنیم و سپس برد آنها را می‌یابیم.

گزینه‌ی (۱):

$$f(x)=x^۲+۲x+۲=(x+۱)^۲+۱$$

$(x+۱)^۲\ge۰$، پس $(x+۱)^۲+۱\ge۱$:

$$\Rightarrow R_f=[۱,+\infty)$$

گزینه‌ی (۲):

$$f(x)=x^۲-۲x-۲=(x-۱)^۲-۳$$

$(x-۱)^۲\ge۰$، پس $(x-۱)^۲-۳\ge-۳$:

$$\Rightarrow R_f=[-۳,+\infty)$$

گزینه‌ی (۳):

$$f(x)=x^۲-۴x+۲=(x-۲)^۲-۲$$

$(x-۲)^۲\ge۰$، پس $(x-۲)^۲-۲\ge-۲$:

$$\Rightarrow R_f=[-۲,+\infty)$$

گزینه‌ی (۴):

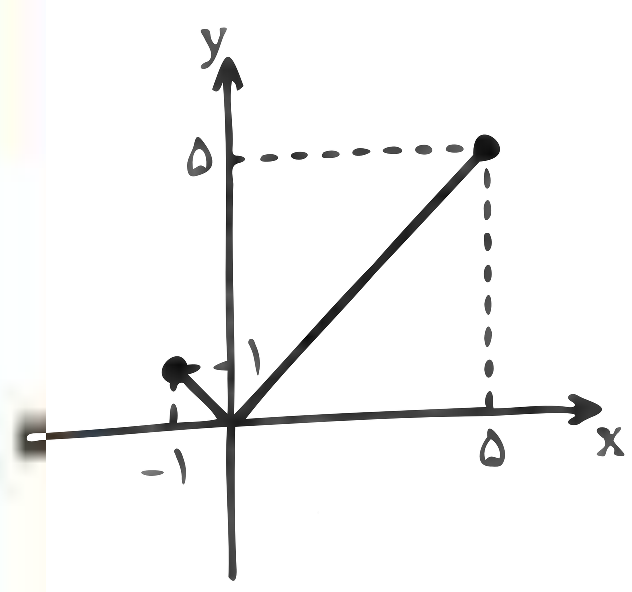
$$f(x) = x^2 + 4x - 2 = (x+2)^2 - 6$$

$(x+2)^2 \ge 0$، پس $(x+2)^2 - 6 \ge -6$:

$$\Rightarrow R_f = [-6 , +\infty)$$

۸۲۳. گزینه‌ی ۳

مجموعه‌ی A باید شامل برد تابع f باشد، لذا برد تابع f را می‌یابیم. با توجه به این که $-1 \le x \le 5$، آنگاه $0 \le |x| \le 5$، پس $R_f = [0 , 5]$. بنابراین A نمی‌تواند بازه‌ی $[1 , 5]$ باشد.



۸۲۴. گزینه‌ی ۳

مجموعه‌ی A باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که مقادیر تابع از بازه‌ی $[0 , 3]$ خارج نشود، اگر $A = \{1\}$، آنگاه $f(1) = 2 \in [0 , 3]$ و قابل قبول است. اگر $A = \{x : -1 \le x \le 2\}$، آنگاه برد تابع بازه‌ی $[0 , 3]$ خواهد بود که زیرمجموعه‌ی بازه‌ی $B = [0 , 3]$ است. اگر $A = \{x : 0 \le x \le 3\}$ آنگاه برد تابع بازه‌ی $[1 , 4]$ خواهد بود که زیرمجموعه‌ی بازه‌ی $B = [0 , 3]$ نخواهد بود. اگر $A = \{0\}$، آنگاه برد تابع مجموعه‌ی $\{1\}$ خواهد بود که زیرمجموعه‌ی $B = [0 , 3]$ است.

۸۲۵. گزینه‌ی ۴

مجموعه‌ی B باید طوری انتخاب شود که $R_f \subseteq B$، برد تابع را می‌یابیم:

$$f(x) = (x-2)^2 + 1 \ge 1 \Rightarrow R_f = [1 , +\infty)$$

لذا گزینه‌ی (۴) نمی‌تواند مجموعه‌ی B باشد.

۸۲۶. گزینه‌ی ۳

برد هر یک از توابع را می‌یابیم:

گزینه‌ی (۱):

$$f(x) = 3 - |x| \qquad D_f = R$$

$$x \in R \Rightarrow |x| \ge 0 \Rightarrow -|x| \le 0 \Rightarrow 3 - |x| \le 3$$

$$\Rightarrow R_f = (-\infty , 3]$$

هم‌دامنه‌ی تابع گزینه‌ی (۱)، $(-\infty , 4)$ است که با برد آن برابر نیست.

گزینه‌ی (۲):

$$f(x) = 1 - x^2 \qquad D_f = R^+$$

$$x \in R^+ \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0 \Rightarrow 1 - x^2 < 1$$

$$\Rightarrow R_f = (-\infty , 1)$$

هم‌دامنه‌ی تابع گزینه‌ی (۲)، $(-\infty , 1]$ است که با برد آن برابر نیست.

گزینه‌ی (۳):

$$f(x) = 3 - |x| \qquad D_f = R$$

$$x \in R \Rightarrow |x| \ge 0 \Rightarrow -|x| \le 0 \Rightarrow 3 - |x| \le 3$$

$$\Rightarrow R_f = (-\infty , 3]$$

هم‌دامنه‌ی تابع گزینه‌ی (۳)، $(-\infty , 3]$ است که با برد آن برابر است.

گزینه‌ی (۴):

$$f(x) = 1 - x^2 \qquad D_f = R^+$$

$$x \in R^+ \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0 \Rightarrow 1 - x^2 < 1$$

$$\Rightarrow R_f = (-\infty , 1)$$

هم‌دامنه‌ی تابع گزینه‌ی (۴)، $(-\infty , 2)$ است که با برد آن برابر نیست.

۸۳۷. گزینه‌ی ۲

حدود تغییرات تابع را با توجه به دامنه‌ی داده شده می‌یابیم. ابتدا عبارت را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$y = 4x^2 - 16x = 4(x^2 - 4x)$$

$$\Rightarrow y = 4((x-2)^2 - 4)$$

$$\Rightarrow y = 4(x-2)^2 - 16$$

$$x \in (-1 , 6] \Rightarrow -1 < x \le 6 \Rightarrow -1-2 < x-2 \le 6-2$$

$$\Rightarrow -3 < x-2 \le 4 \Rightarrow 0 \le (x-2)^2 \le 16$$

$$\Rightarrow -16 \le 4(x-2)^2 - 16 \le 48$$

بنابراین:

$$-16 \le f(x) \le 48$$

پس عدد -17 در برد تابع قرار ندارد.

یک تابع را می‌توان ماشینی در نظر گرفت که به ازای هر ورودی مجاز x یک خروجی y را تحت اثر عملیات f تحویل می‌دهد. در این حالت، اگر x عضوی دلخواه از دامنه‌ی تابع f و y خروجی نظیر آن باشد، x را **متغیر مستقل** و y را **متغیر وابسته** می‌نامند و می‌نویسیم $y = f(x)$، به شکل زیر توجه کنید:

$$x \rightarrow \boxed{f(x)} \rightarrow y = f(x)$$

۸۳۸. گزینه‌ی ۱

با توجه به توضیح سؤال، اگر ورودی x باشد، خروجی $(2x+3)^2$ خواهد بود. بنابراین اگر ورودی عدد ۴ باشد، خروجی برابر است با:

$$(2 \times 4 + 3)^2 = 11^2 = 121$$

۸۳۹. گزینه‌ی ۲

با توجه به توضیح سؤال، اگر ورودی x باشد، خروجی $4x^2 - 3$ خواهد بود، بنابراین اگر خروجی عدد یک باشد، داریم:

$$4x^2 - 3 = 1 \Rightarrow 4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

۸۴۰. گزینه‌ی ۴

با توجه به توضیح سؤال، اگر ورودی x باشد، خروجی به صورت $\frac{1}{2}x^2 - 2x$ است، یعنی:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x \Rightarrow \begin{cases} f(2) = -2 \\ f(4) = 0 \\ f(8) = 16 \end{cases}$$

راهبرد حل تیپ (۶)

ضابطه‌ی تابع خطی به صورت $y=ax+b$ است که a شیب خط و b عرض از مبدأ خط است.

* تذکر: با داشتن دو نقطه از خط، می‌توان معادله‌ی خط را نوشت:

$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$: معادله‌ی خط گذرنده از نقاط A و B

• نکته: اگر دامنه‌ی تابع خطی به صورت یک بازه مشخص شود، می‌توان برد تابع را بدون رسم نمودار به دست آورد.

مثال: برد تابع خطی $f(x)=-۲x+۵$ با دامنه‌ی $(-۳,۱]$ برابر است با:

$$-۳<x\le ۱\xrightarrow{\times(-۲)}-۲\le -۲x<۶\xrightarrow{+۵}$$
$$۳\le -۲x+۵<۱۱\Rightarrow R_f=[۳,۱۱)$$

* تذکر: با قرار دادن نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی دامنه در ضابطه‌ی تابع خطی، می‌توان برد تابع را یافت.

$$\begin{cases}f(-۳)=-۲(-۳)+۵=۱۱\\ f(۱)=-۲(۱)+۵=۳\end{cases}\Rightarrow ۳\le f(x)<۱۱$$

به جدول زیر توجه کنید.

تابع خطی	دامنه	برد	
		$a>۰$	$a<۰$
$f(x)=ax+b$	$[k,m]$	$[f(k),f(m)]$	$[f(m),f(k)]$

۸۴۱. گزینه‌ی ۲

معادله‌ی یک تابع خطی به‌صورت $y=ax+b$ است. بنابراین:

گزینه‌ی (۱): در حالتی که $a=۰$ و $b=-۵$ به‌دست می‌آید.

گزینه‌ی (۳): در حالتی که $a=-۵$ و $b=۱$ به‌دست می‌آید.

در گزینه‌ی (۴) نیز داریم:

$$۲y=-۵x+۷\Rightarrow y=\frac{-۵}{۲}x+\frac{۷}{۲}$$

اما خط $x=a$ نمایش یک تابع نیست.

۸۴۲. گزینه‌ی ۴

ضابطه‌ی f به‌صورت $f(x)=ax+b$ است، بنابراین:

$$f(۳)=۳a+b$$
$$f(-۳)=-۳a+b$$
$$\Rightarrow f(۳)=f(-۳)+۴\Rightarrow ۳a+b=-۳a+b+۴\Rightarrow a=\frac{۲}{۳}$$
$$f(۲)=۱\Rightarrow ۲(\frac{۲}{۳})+b=۱\Rightarrow b=-\frac{۱}{۳}$$
$$f(x)=\frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۳}\xrightarrow{x=۰}y=-\frac{۱}{۳}$$

۸۴۳. گزینه‌ی ۲

اگر ضابطه‌ی تابع خطی f را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر بگیریم، با توجه به این که $f(۰)=۱$ و $f(-۱)=۲$ است، داریم:

$$\begin{cases}f(۰)=۱\Rightarrow ۱=a(۰)+b\Rightarrow b=۱\\ f(-۱)=۲\Rightarrow ۲=-a+b\xrightarrow{b=۱}a=-۱\end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x)=-x+۱$$
$$\Rightarrow f(-۲)=-(-۲)+۱=۳$$

۸۴۴. گزینه‌ی ۱

چون F خطی است پس به‌صورت $F(x)=ax+b$ است. داریم:

$$F(۱)+F(۳)=۱۴$$
$$\Rightarrow (a\times ۱+b)+(a\times ۳+b)=۴a+۲b=۱۴\quad (۱)$$
$$F(۳)-F(۱)=۴$$
$$\Rightarrow (a\times ۳+b)-(a\times ۱+b)=۲a=۴\quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $a=۲$ و $b=۳$. با جایگذاری در ضابطه‌ی تابع F داریم:

$$F(x)=۲x+۳\Rightarrow F(۲)=۷$$

۸۴۵. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=ax+۵\Rightarrow f(۳)=۳a+۵$$
$$f(f(۳))=۷\Rightarrow f(۳a+۵)=۷\Rightarrow a(۳a+۵)+۵=۷$$
$$\Rightarrow ۳a^۲+۵a-۲=۰\Rightarrow (۳a-۱)(a+۲)=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ a=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

از آن‌جایی که $a<۰$ است، پس تنها جواب $a=-۲$ قابل قبول است. داریم:

$$\Rightarrow f(x)=ax+۵\Rightarrow f(x)=-۲x+۵$$
$$\Rightarrow f(-۳)=-۲(-۳)+۵=۱۱$$

۸۴۶. گزینه‌ی ۲

$f(۳)$ و $f(a)$ و $f(۹)$

سه مقدار بالا تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند، پس:

$$۲f(a)=f(۳)+f(۹)$$
$$\Rightarrow ۲(a\times a+۳)=(۳a+۳)+(۹a+۳)$$
$$\Rightarrow ۲a^۲+۶=۱۲a+۶\Rightarrow a^۲-۶a=۰$$
$$\rightarrow a=۰,\ a=۶\xrightarrow{a\neq ۰}a=۶$$

بنابراین:

$$f(x)=۶x+۳$$

پس:

$$f(۲a)=f(۱۲)=۶\times ۱۲+۳=۷۵$$

۸۴۷. گزینه‌ی ۳

اگر نمایش جبری تابع خطی f را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر بگیریم، طبق صورت سؤال، نقاط $A(-\frac{۱}{۲},۰)$ و $B(۰,\frac{۱}{۲})$ در آن صدق می‌کنند، پس:

$$\begin{cases}۰=a\times(-\frac{۱}{۲})+b\\ \frac{۱}{۲}=a\times(۰)+b\end{cases}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲}\ ,\ a=۱$$

پس نمایش جبری f به صورت $f(x)=x+\frac{۱}{۲}$ است. اگر $x_۰$ طول نقطه‌ی تقاطع نمودار تابع f با نیمساز ربع دوم و چهارم $(y=-x)$ باشد، داریم:

$$f(x_۰)=-x_۰\Rightarrow x_۰+\frac{۱}{۲}=-x_۰\Rightarrow x_۰=-\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \text{عرض نقطه‌ی تقاطع}: f(x_۰)=-x_۰=\frac{۱}{۴}$$

۸۴۸. گزینه‌ی ۴

اگر نقطه‌ی (a,b) متعلق به تابع f باشد، آنگاه $f(a)=b$، پس:

$$(a,-۲)\in f\Rightarrow f(a)=-۲\Rightarrow ۳a-۵=-۲$$
$$\Rightarrow ۳a=۳\Rightarrow a=۱\in D_f$$

به همین ترتیب:

$$\begin{cases}f(a)=۱\Rightarrow ۳a-۵=۱\Rightarrow a=۲\in D_f\\ f(a)=۴\Rightarrow ۳a-۵=۴\Rightarrow a=۳\in D_f\\ f(a)=۷\Rightarrow ۳a-۵=۷\Rightarrow a=۴\in D_f\end{cases}$$

بنابراین:

$$D_f=\{۱,۲,۳,۴\}$$

۸۴۹. گزینه‌ی ۳

دامنه‌ی تابع، اعداد طبیعی فرد است، یعنی: $D_f=\{۱,۳,۵,۷,...\}$
به ازای این اعداد، باید برد تابع اعداد طبیعی باشد، با قرار دادن این نقاط در هر تابع داریم:

برد، اعداد طبیعی فرد $\{...,۷,۵,۳,۱\}=$ برد : گزینه‌ی (۱)

برد، اعداد حسابی $\{...,۲,۱,۰\}=$ برد : گزینه‌ی (۲)

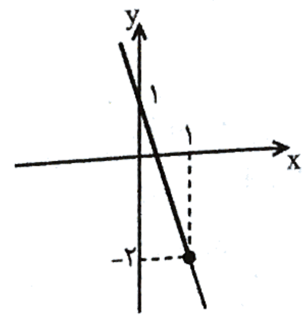
برد، اعداد طبیعی $\{...,۳,۲,۱\}=$ برد : گزینه‌ی (۳)

برد، اعداد صحیح فرد منفی $\{...,-۳,-۱\}=$ برد : گزینه‌ی (۴)

پس گزینه‌ی (۳) درست است.

۸۵۰. گزینه‌ی ۲

راه حل اول: با رسم نمودار تابع $y=۱-۳x$ خواهیم داشت:



بنابراین برد تابع بازه‌ی $[-۲,+\infty)$ است.

راه حل دوم:

$$x\le ۱\xrightarrow{\times(-۳)}-۳x\ge -۳$$
$$\xrightarrow{+۱}۱-۳x\ge -۲\Rightarrow f(x)\ge -۲$$
$$\Rightarrow R_f=[-۲,+\infty)$$

۸۵۱. گزینه‌ی ۲

با توجه به حدود تغییرات x، حدود تغییرات $g(x)$ را می‌یابیم:

$$-۲\le x\le ۳\xrightarrow{\times(-۲)}-۶\le -۲x\le ۴$$
$$\xrightarrow{+۲}-۴\le -۲x+۲\le ۶\Rightarrow -۴\le g(x)\le ۶$$
$$\Rightarrow \text{برد تابع } g=[-۴,۶]$$

۸۵۲. گزینه‌ی ۴

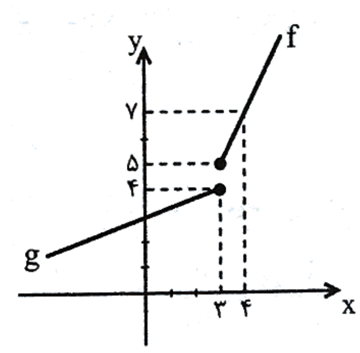
نمودار توابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

$f(x)=۲x-۱,\ D_f=[۳,+\infty)$

x	۳	۴
f(x)	۵	۷

$g(x)=\frac{۱}{۳}x+۳\ ,\ D_g=(-\infty,۳]$

x	۰	۳
g(x)	۳	۴



با توجه به نمودار توابع f و g، اجتماع برد دو تابع f و g برابر است با $R-(۴,۵)$.

۸۵۳. گزینه‌ی ۱

برد تابع اعداد حقیقی مثبت است، بنابراین:

$$f(x)>۰\Rightarrow -۶x+۴>۰\Rightarrow -۶x>-۴$$
$$\Rightarrow x<\frac{۴}{۶}\Rightarrow x<\frac{۲}{۳}\Rightarrow x\in(-\infty,\frac{۲}{۳})$$

۸۵۴. گزینه‌ی ۲

برد تابع اعداد طبیعی فرد است، یعنی:

$$R=\{۱,۳,۵,۷,...\}$$

لذا اعضای دامنه‌ی تابع را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$-۴x+\frac{۳}{۲}=a\in R$$

به‌عنوان مثال:

$$-۴x+\frac{۳}{۲}=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۸}$$
$$-۴x+\frac{۳}{۲}=۳\Rightarrow x=\frac{-۳}{۸}$$
$$-۴x+\frac{۳}{۲}=۵\Rightarrow x=\frac{-۷}{۸}$$

و به طریق مشابه می‌توان بقیه‌ی اعضای دامنـه‌ی تـابع را بـه‌دست آورد. دیده می‌شود که با افـزایش مقـادیر بـرد، مقـادیر دامنـه، نیـز متوالیاً، عددی منفی‌تر خواهند شد، پس کـوچکترین مقـدار دامنـه وجود ندارد. تنها مقدار مثبت دامنه، عدد $\frac{۱}{۸}$ است، بنابراین بزرگترین عضو دامنه، عدد $\frac{۱}{۸}$ است.

۸۵۵. گزینه‌ی ۳

اگر طول را x در نظر بگیریم طبق صورت سؤال عرض مستطیل برابر با $\frac{x}{۲}-۲$ است.

پس محیط مستطیل برابر است با:

$$P=۲(x+\frac{x}{۲}-۲)=۲(\frac{۳}{۲}x-۲)=۳x-۴$$

۸۵۶. گزینه‌ی ۳

نقطه‌ی جوش آب در سطح دریا $۱۰۰^\circ C$ است پس:

$$f(۱۰۰)=\frac{۹}{۵}(۱۰۰)+۳۲=۲۱۲^\circ F$$

۸۵۷. گزینه‌ی ۲

راه حل اول: چون رابطه‌ی بین x و y یک تابع خطی است، داریم:

$$y=ax+b$$
$$\text{شیب خط}=\frac{\text{مقدار افزایش سود}}{\text{مقدار افزایش تولید}}=\frac{۰/۰۸}{۰/۰۲}=۴$$
$$\Rightarrow y=۴x+b$$

سوددهی کارخانه به ازای ۲۵ واحد کالا برابر با صفر می‌شود، پس:

$$۰=۴\times ۲۵+b\Rightarrow b=-۱۰۰\Rightarrow y=۴x-۱۰۰$$

راه حل دوم: طبق صورت سؤال، به ازای $x=۲۵$ خواهیم داشـت: $y=۰$، که تنها تابع گزینه‌ی «۲» به ازای $x=۲۵$ صفر می‌شود.

۸۵۸. گزینه‌ی ۳

رابطه‌ی بین طول ضلع (a) و محیط (P) یک مربع، $P=۴a$ است. این رابطه خطی است، اما عرض از مبدأ آن صفر است.

رابطه‌ی بین طول ضلع یک مربع و مساحت (S) آن، $S=a^۲$ است که یک رابطه‌ی خطی نیست.

رابطه‌ی بین دو ضلع یک مسـتطیل بـه اضـلاع a و b، $b-a=۲$ یـا $b=a+۲$ است، که یک رابطه‌ی خطـی بـا عـرض از مبـدأ ۲ اسـت. (محور xها، a و محور yها، b خواهد بود)، رابطه‌ی بین طول شعاع یک دایره و مساحت آن $S=\pi r^۲$ است که رابطه‌ی خطی نیست.

۸۵۹. گزینه‌ی ۳

در شکل اول، محیط ذوزنقه برابر با ۵ است و با اضافه شدن یک ذوزنقه در هر مرحله، ۳ واحد به محیط اضافه می‌شود، پس محیط ذوزنقه‌ها، یک الگوی حسابی است که جمله‌ی عمومی آن برابر است با:

$$P(n)=۵+(n-۱)(۳)\Rightarrow P(n)=۳n+۲$$

توجه کنید که دامنه‌ی این تابع، مقادیر n، اعداد طبیعی‌اند. پس مقدار هر یک از گزینه‌ها را برابر با $P(n)$ قرار داده و n را می‌یابیم. اگر n عددی طبیعی به دست نیامد، آن مقدار در برد تابع قرار ندارد:

گزینه‌ی (۱): $۳۸ = ۳n + ۲ \Rightarrow n = \frac{۳۸ - ۲}{۳} = ۱۲$ ✓

گزینه‌ی (۲): $۴۴ = ۳n + ۲ \Rightarrow n = \frac{۴۴ - ۲}{۳} = ۱۴$ ✓

گزینه‌ی (۳): $۴۸ = ۳n + ۲ \Rightarrow n = \frac{۴۸ - ۲}{۳} = \frac{۴۶}{۳}$ ✗

گزینه‌ی (۴): $۵۹ = ۳n + ۲ \Rightarrow n = \frac{۵۹ - ۲}{۳} = ۱۹$ ✓

۸۶۰. گزینه‌ی ۲

طبق نمودار، در سال دوم (۱۲ تا ۲۴ ماهگی)، مقدار وزن (W) افزایش یافته، پس رشد داشته است ولی تغییرات وزن نسبت به سال اول (۰ تا ۱۲ ماهگی) کمتر بوده است، پس با کندی رشد روبه‌رو بوده است.

در سال سوم (۲۴ تا ۳۶ ماهگی) مقدار وزن ثابت بوده، پس با توقف رشد روبه‌رو بوده است.

راهبرد حل تیپ (۷)

تابع چندجمله‌ای یک چندجمله‌ای است که فقط یک متغیر دارد، به عنوان مثال: $f(x) = ۲x^۴ + ۳x^۲ + ۱$

با جایگزین کردن عدد به جای x، مقدار تابع به دست می‌آید. در مثال بالا داریم: $f(-۱) = ۲(-۱)^۴ + ۳(-۱)^۲ + ۱ = ۶$

۸۶۱. گزینه‌ی ۱

تابع محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع می‌کند، بنابراین نقطه‌ی $(۰, ۲)$ روی نمودار تابع قرار دارد.

$$f(x) = ۲x^۲ + ax + b$$

$$\xrightarrow{(۰,۲) \in f} ۲(۰)^۲ + a(۰) + b = ۲ \Rightarrow b = ۲ \quad (۱)$$

$$\Rightarrow f(x) = ۲x^۲ + ax + ۲$$

از طرفی $f(۱) = ۴$، بنابراین:

$$f(x) = ۲x^۲ + ax + ۲ \xrightarrow{(۱,۴) \in f} ۲(۱)^۲ + a(۱) + ۲ = ۴$$

$$\Rightarrow ۲ + a + ۲ = ۴ \Rightarrow a = ۰ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a + b = ۰ + ۲ = ۲$$

۸۶۲. گزینه‌ی ۲

ابتدا ضابطه‌ی تابع $f(x)$ را بازنویسی کرده و سپس تابع $f(x-۲)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x) = -۲x^۲ + ۴x + ۶ = -۲(x^۲ - ۲x - ۳)$$

$$= -۲(x-۳)(x+۱)$$

$$f(x-۲) = -۲(x-۲-۳)(x-۲+۱) = -۲(x-۵)(x-۱)$$

$$\Rightarrow -۲(x-۵)(x-۱) \geq ۰$$

$$\Rightarrow ۲(x-۵)(x-۱) \leq ۰ \Rightarrow ۱ \leq x \leq ۵$$

۸۶۳. گزینه‌ی ۱

$$f(x) = x^۳ + ۲x^۲ + ax + b$$

$$f(۱) = ۵ \Rightarrow ۱ + ۲ + a + b = ۵ \Rightarrow a + b = ۲ \quad (۱)$$

$$f(-۲) = -۱ \Rightarrow -۸ + ۸ - ۲a + b = -۱ \Rightarrow -۲a + b = -۱ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ۲\times\begin{cases} a + b = ۲ \\ -۲a + b = -۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع دو معادله}} ۳b = ۳$$

$$\Rightarrow b = ۱ \xrightarrow{a+b=۲} a = ۱$$

$$\Rightarrow ۳a - ۲b = ۳ - ۲ = ۱$$

۸۶۴. گزینه‌ی ۳

راه حل اول:

$$f(x) = ax^۴ - bx^۲ + x + ۵$$

$$\begin{cases} f(-۳) = a(-۳)^۴ - b(-۳)^۲ + (-۳) + ۵ \quad (۱) \\ f(۳) = a(۳)^۴ - b(۳)^۲ + ۳ + ۵ \quad (۲) \end{cases}$$

تفاضل $(۱), (۲): f(۳) - f(-۳) = ۶$

$$\xrightarrow{f(-۳)=۲} f(۳) - ۲ = ۶ \Rightarrow f(۳) = ۸$$

راه حل دوم:

$$f(x) = ax^۴ - bx^۲ + x + ۵$$

$$f(-۳) = ۲ \Rightarrow ۸۱a - ۹b - ۳ + ۵ = ۲ \Rightarrow ۸۱a - ۹b = ۰$$

$$f(۳) = \underbrace{۸۱a - ۹b}_{۰} + ۳ + ۵ = ۰ + ۸ = ۸$$

۸۶۵. گزینه‌ی ۳

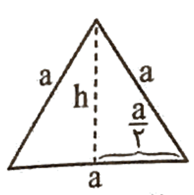
در رابطه به جای x، اعداد ۲ و ۲- را قرار داده و دستگاه حاصل را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = ۲: \quad ۲f(-۲) + ۲f(۲) = ۶ \\ x = -۲: -۲f(۲) + ۲f(-۲) = -۱۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} -۴f(۲) = -۱۶ \Rightarrow f(۲) = ۴$$

۸۶۶. گزینه‌ی ۲

مطابق شکل داریم:

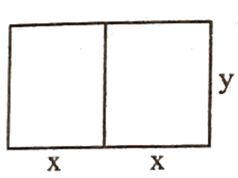


$$S = \frac{۱}{۲}(\text{قاعده})(\text{ارتفاع})$$

$$h^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = \frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$\Rightarrow S(a) = \frac{۱}{۲}(a)(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

۸۶۷. گزینه‌ی ۱



$$P = ۳y + ۴x = ۲۰۰ \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}(۲۰۰ - ۴x)$$

$$S = ۲xy = ۲x(\frac{۱}{۳}(۲۰۰ - ۴x)) = \frac{۲}{۳}(۲۰۰x - ۴x^۲)$$

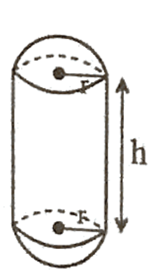
۸۶۸. گزینه‌ی ۲

مساحت دایره $A(r) = \pi r^۲$ و محیط آن $P(r) = ۲\pi r$، پس:

$$r = \frac{P}{۲\pi} \Rightarrow A(P) = \pi(\frac{P}{۲\pi})^۲ = \frac{P^۲}{۴\pi}$$

۸۶۹. گزینه‌ی ۲

تانکر گاز به صورت روبه‌روست.



ارتفاع قسمت استوانه‌ای آن را با h و شعاع نیم‌کره‌ها را با r نمایش می‌دهیم. حجم این تانکر از جمع حجم یک کره (اگر دو نیم‌کره به‌یکدیگر متصل شوند یک کره به شعاع r ایجاد می‌گردد) و حجم یک استوانه تشکیل شده است.

بنابراین: حجم تانکر = حجم کره + حجم استوانه

$$\text{حجم تانکر}: V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ + \pi r^۲ h$$

$$\xrightarrow{h=۸} V(r) = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ + ۸\pi r^۲$$

راهبرد حل تیپ (۸)

در تابع همانی، هر عضو به خود همان عضو نسبت داده می‌شود. نمایش‌های مختلف تابع همانی به صورت زیر است:

نمایش تابع	تابع همانی
زوج مرتبی	مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب، با هم برابرند.
پیکانی	هر عضو مجموعه‌ی اول به همان عضو در مجموعه‌ی دوم می‌رود.
جبری	$f(x)=x$

۸۷۰. گزینه‌ی ۲

تابع f همانی است، پس مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب از آن برابرند، در نتیجه:

$$\begin{cases} b^۲+۴=۵ \Rightarrow b^۲=۱ \Rightarrow b=۱ , b=-۱ \quad (۱)\\ b=a-۱ \quad (۲)\\ ۲b=۲ \Rightarrow b=۱ \quad (۳)\end{cases}$$

از اشتراک (۱) و (۳)، نتیجه می‌شود:

$$b=۱ \Rightarrow b=a-۱ \xrightarrow{b=۱} a=۲$$

بنابراین:

$$a+b=۲+۱=۳$$

۸۷۱. گزینه‌ی ۴

تابع f را به‌صورت زوج‌های مرتب می‌نویسیم:

$$f=\{(b-۱,۵),(۳,a),(۴,۴),(c,a-۱)\}$$

اما f تابعی همانی است، پس مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتبی از آن با هم برابرند، لذا:

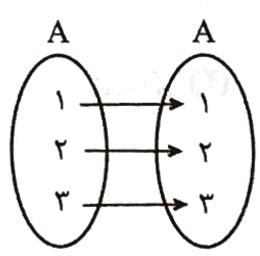
$$b-۱=۵ \Rightarrow b=۶$$
$$۳=a \Rightarrow a=۳$$
$$c=a-۱ \xrightarrow{a=۳} c=۲$$

بنابراین:

$$a+b-۲c=۳+۶-۴=۵$$

۸۷۲. گزینه‌ی ۱

اگر هر عضو دامنه، دقیقاً به همان عضو از برد نظیر شود، تابع همانی است. تابع A، ۳ عضو دارد. بنابراین با توجه به نمودار پیکانی، تنها یک تابع همانی از A به A وجود دارد.



۸۷۳. گزینه‌ی ۲

اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، آن تابع را تابع همانی می‌نامند، بنابراین:

$$۲x^۲-۶=x \Rightarrow ۲x^۲-x-۶=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱=\dfrac{۱+\sqrt{۴۹}}{۴}=\dfrac{۸}{۴}=۲\\ x_۲=\dfrac{۱-\sqrt{۴۹}}{۴}=-\dfrac{۶}{۴}=-\dfrac{۳}{۲}\end{cases}$$

بنابراین، دامنه‌ی تابع f مجموعه‌ی دو عضوی $\{۲,-\frac{۳}{۲}\}$ است.

۸۷۴. گزینه‌ی ۱

ضابطه‌ی تابع همانی $f(x)=x$ است. بنابراین:

$$\xrightarrow[f(x)=x]{f(x)=(a-b)x+a+b} \begin{cases} a-b=۱\\ a+b=۰\end{cases} \Rightarrow ۲a=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$a+b=۰ \xrightarrow{a=\frac{۱}{۲}} b=-\frac{۱}{۲}$$

$$۳a+۲b=\frac{۳}{۲}-\frac{۲}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

راهبرد حل تیپ (۹)

در تابع ثابت، همه‌ی عضوهای دامنه فقط به یک مقدار ثابت از برد نسبت داده می‌شوند و برد آن یک مجموعه‌ی تک عضوی است. در نمایش‌های مختلف، تابع ثابت به صورت زیر است:

نمایش تابع	تابع ثابت
زوج مرتبی	همه‌ی مؤلفه‌های دوم با هم برابرند.
پیکانی	همه‌ی عضوهای مجموعه‌ی اول فقط به یک عضو مجموعه‌ی دوم می‌روند.
جبری	$f(x)=k$ (مقدار ثابت k)

۸۷۵. گزینه‌ی ۳

در تابع ثابت، مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب با هم برابرند، لذا:

$$۲m=m^۲-m \Rightarrow m=۰ , m=۳ \quad (۱)$$
$$۲m=m \Rightarrow m=۰ \quad (۲)$$

بنابراین از اشتراک (۱) و (۲) داریم: $m=۰$.

۸۷۶. گزینه‌ی ۱

برد تابع ثابت فقط یک عضو دارد، پس با توجه به جدول $R_f=\{۴\}$. بنابراین:

$$\sqrt{k}=۴ , \sqrt[۳]{b}=۴ , \quad d=۴$$
$$k=۱۶ , \quad b=۶۴ , \quad d=۴$$
$$\frac{b-۳k}{d+۱۲}=\frac{۶۴-۳\times۱۶}{۴+۱۲}=\frac{۶۴-۴۸}{۱۶}=۱$$

۸۷۷. گزینه‌ی ۱

f تابعی همانی است، پس ضابطه‌ی آن به‌صورت $f(x)=x$ است، بنابراین:

$f(۲)=۲$ و $f(۱)=۱$

g تابعی ثابت است، پس معادله‌ی آن به‌صورت $g(x)=k$ است، لذا:

$$g(۳)=g(۷)=k$$

در نتیجه:

$$\frac{۳f(۲)+g(۳)}{۲g(۷)+f(۱)}=\frac{۱۰}{۹} \Rightarrow \frac{۳\times۲+k}{۲k+۱}=\frac{۱۰}{۹} \Rightarrow \frac{۶+k}{۲k+۱}=\frac{۱۰}{۹}$$
$$\Rightarrow ۵۴+۹k=۲۰k+۱۰ \Rightarrow ۱۱k=۴۴ \Rightarrow k=۴$$

۸۷۸. گزینه‌ی ۱

ضابطه‌ی تابع ثابت به‌صورت $y=k$ است، پس برای آنکه تابع خطی داده شده تابعی ثابت باشد، باید ضریب x آن (شیب خط) صفر شود، بنابراین:

$$a+۱=۰ \Rightarrow a=-۱$$

در نتیجه معادله‌ی تابع به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$f(x)=۰-۲-۱=-۳$$

بنابراین به ازای هر مقداری از x، مقدار تابع f برابر با -۳ است:

$$f(f(۱))=-۳$$

۸۷۹. گزینه‌ی ۱

دامنه‌ی تابع f برابر با R و برد آن تک‌عضوی است بنابراین تابع، تابع ثابت است و مقادیر آن به x وابسته نیست. بنابراین باید ضرایب x و $x^۲$ صفر باشند. یعنی:

$$\begin{cases} b-۲=۰ \Rightarrow b=۲\\ a-b-۱=۰ \Rightarrow a-۲-۱=۰ \Rightarrow a=۳\end{cases}$$

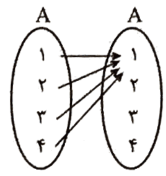
با جایگذاری مقادیر a و b در f داریم: $f(x)=c+۲$

از طرفی چون برد تابع f برابر با $\{۲c-۳\}$ است، پس:

$$۲c-۳=c+۲ \Rightarrow c=۵ \Rightarrow a+b+c=۱۰$$

۸۸۰. گزینه‌ی ۴

تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت نامیده می‌شود.
باید تابع‌هایی را بیابیم که دامنه‌ی آنها شامل هر ۴ عضو مجموعه‌ی A و برد آنها شامل تنها یک عضو مجموعه‌ی دوم یعنی A باشد.
مجموعه‌ی دوم A، ۴ عضو دارد، بنابراین یکبار هر ۴ عضو A به عدد ۱، سپس هر ۴ عضو به عدد ۲ و ... نسبت داده می‌شوند. پس چهار تابع خواهیم داشت.
به‌عنوان مثال:



راهبرد حل تیپ (۱۰)

تابع گویا به صورت $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ است که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند. $(Q(x)\neq ۰)$
دامنه‌ی تابع همه‌ی اعداد حقیقی است به جز اعدادی که مخرج کسر را صفر می‌کنند.
* **تذکر:** برای تعیین دامنه‌ی تابع گویا، همواره دامنه‌ی تابع را قبل از ساده کردن صورت و مخرج آن، محاسبه می‌کنیم.

۸۸۱. گزینه‌ی ۳

در توابع گویا، صورت و مخرج چند جمله‌ای‌اند، در گزینه‌ی (۳)، صورت کسر، یک عبارت گنگ است. پس $y=\dfrac{\sqrt{۲x}+۱}{x^۲+۱}$ یک تابع گویا نیست.

۸۸۲. گزینه‌ی ۳

ابتدا به کمک دو نقطه از تابع، مقادیر a و k را می‌یابیم:

$$\begin{cases} f(۲)=۳ \Rightarrow ۳=\dfrac{k}{۲+a}\Rightarrow k=۶+۳a \\ f(۴)=۱ \Rightarrow ۱=\dfrac{k}{۴+a}\Rightarrow k=۴+a \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۶+۳a=۴+a\Rightarrow a=-۱\,,\,k=۳$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به‌صورت $f(x)=\dfrac{۳}{x-۱}$ است. مقدار $f(۱۱)$ را می‌یابیم:

$$f(۱۱)=\frac{۳}{۱۱-۱}=\frac{۳}{۱۰}$$

۸۸۳. گزینه‌ی ۳

نقطه‌ی $(-۱\,,۱)$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$y=a+\frac{b}{x}\xrightarrow{\text{تابع}\ \ni (-۱,۱)}۱=a-b \quad (۱)$$

و نقطه‌ی $(۵\,,-۵)$ در تابع صدق می‌کند، پس:

$$y=a+\frac{b}{x}\xrightarrow{\text{تابع}\ \ni(-۵,۵)}۵=a-\frac{b}{۵} \quad (۲)$$

از حل دستگاه دو معادله دو مجهولی مقدار a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} a-b=۱ \\ a-\dfrac{b}{۵}=۵ \end{cases}\Rightarrow a=۶\,,b=۵\Rightarrow a+b=۱۱$$

۸۸۴. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=\frac{۲x^۲+۲}{x^۲-۳}\Rightarrow f(۲-\sqrt{۳})=\frac{۲(۲-\sqrt{۳})^۲+۲}{(۲-\sqrt{۳})^۲-۳}$$

$$=\frac{۲(۴-۴\sqrt{۳}+۳)+۲}{۴-۴\sqrt{۳}+۳-۳}=\frac{۱۶-۸\sqrt{۳}}{۴-۴\sqrt{۳}}$$

$$=\frac{۴(۴-۲\sqrt{۳})}{۴(۱-\sqrt{۳})}=\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}$$

مخرج کسر $\dfrac{۴-۲\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}$ را گویا می‌کنیم:

$$\frac{۴-۲\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}\times\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}}=\frac{۴+۴\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}-۶}{۱-۳}=\frac{۲\sqrt{۳}-۲}{-۲}$$

$$=\frac{۲(\sqrt{۳}-۱)}{-۲}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{-۱}=۱-\sqrt{۳}$$

۸۸۵. گزینه‌ی ۳

$$f(x)=\frac{x^۲+۴x+۵}{x^۲+۴x+۷}=\frac{(x^۲+۴x+۴)+۱}{(x^۲+۴x+۴)+۳}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(x+۲)^۲+۱}{(x+۲)^۲+۳}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{۳}-۲)=\frac{(\sqrt{۳}-۲+۲)^۲+۱}{(\sqrt{۳}-۲+۲)^۲+۳}=\frac{۳+۱}{۳+۳}=\frac{۲}{۳}$$

۸۸۶. گزینه‌ی ۴

در توابع گویا، مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد. همچنین دامنه‌ی تابع را باید قبل از ساده‌کردن ضابطه‌ی آن بیابیم، بنابراین:

گزینه‌ی (۱):
$$y=\frac{x+۲}{(x+۲)^۲}$$
$$x+۲\neq ۰\Rightarrow x\neq -۲\Rightarrow D=R-\{-۲\}$$

گزینه‌ی (۲):
$$y=\frac{x+۲}{x+۲}$$
$$x+۲\neq ۰\Rightarrow x\neq -۲\Rightarrow D=R-\{-۲\}$$

گزینه‌ی (۳):
$$y=\frac{(x+۲)^۲}{x+۲}$$
$$x+۲\neq ۰\Rightarrow x\neq -۲\Rightarrow D=R-\{-۲\}$$

گزینه‌ی (۴):
$$y=\frac{\dfrac{۱}{x+۲}-۱}{\dfrac{۱}{x+۲}+۱}$$
$$x+۲\neq ۰\Rightarrow x\neq -۲$$
$$\frac{۱}{x+۲}+۱\neq ۰\Rightarrow\frac{۱}{x+۲}\neq -۱\Rightarrow x+۲\neq -۱\Rightarrow x\neq -۳$$
$$\Rightarrow D=R-\{-۲\,,-۳\}$$

۸۸۷. گزینه‌ی ۴

برای این‌که عبارت به ازای هر x حقیقی تعریف شده باشد، باید عبارت درجه دوم در مخرج کسر ریشه نداشته باشد، یعنی $\Delta<۰$ باشد، پس داریم:

$$A(x)=\frac{۶x^۲-۲x}{-kx^۲+۲x-۹k}$$

$$\text{مخرج کسر}:\Delta<۰\Rightarrow\Delta=۴-۴(-k)(-۹k)<۰$$

$$\Rightarrow ۴-۳۶k^۲<۰\Rightarrow k^۲>\frac{۱}{۹}\Rightarrow k>\frac{۱}{۳}\ \text{یا}\ k<-\frac{۱}{۳}$$

۸۸۸. گزینه‌ی ۲

با توجه به دامنه‌ی تابع، تنها در صورتی دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{x+۴}{۲x^۲-ax+b-۵}$ به صورت $R-\{۲\}$ می‌باشد که مخرج کسر، ریشه‌ی مضاعف $x=۲$ داشته باشد. پس با توجه به ضریب $x^۲$ در مخرج کسر، ضابطه‌ی تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{x+۴}{۲(x-۲)^۲}=\frac{x+۴}{۲x^۲-۸x+۸}=\frac{x+۴}{۲x^۲-ax+b-۵}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a=-۸\Rightarrow a=۸\\ b-۵=۸\Rightarrow b=۱۳\end{cases}\Rightarrow a+b=۲۱$$

۸۸۹. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=\frac{x^۳-x}{x^۲-x}=\frac{x(x^۲-۱)}{x(x-۱)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\cancel{x(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{x(x-۱)}}\xrightarrow{x\neq ۰,۱} f(x)=x+۱$$

تابع f، برابر $f(x)=x+۱$ است که فقط در دو نقطه به طول‌های $x=۱$ و $x=۰$ تعریف نمی‌شود. برد تابع خطی، R است، پس برد تابع f مجموعه‌ی اعداد حقیقی، بجز مقدار تابع در این دو نقطه است:

$$\begin{cases}x=۰\Rightarrow f(۰)=۱\\ x=۱\Rightarrow f(۱)=۲\end{cases}\Rightarrow R_f=R-\{۱,۲\}$$

۸۹۰. گزینه‌ی ۱

ضابطه‌ی تابع ثابت به صورت $y=k$ است، بنابراین باید $f(x)=k$ شود:

$$f(x)=\frac{ax+۴}{x+a}=k$$

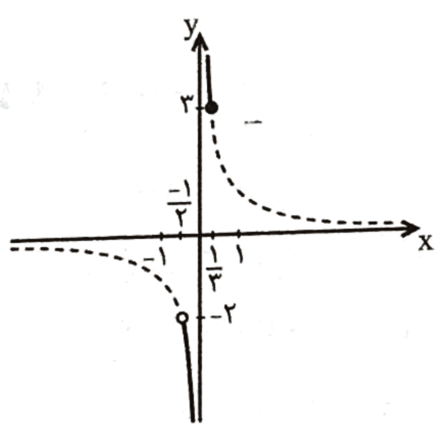
$$\Rightarrow ax+۴=kx+ka$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=k\quad (*)\\ ۴=ka\xrightarrow{(*)}۴=a^۲\Rightarrow a=\pm ۲\end{cases}$$

اگر $a=۲$ باشد، $f(x)=۲$ خواهد بود که از ناحیه‌ی اول و دوم عبور می‌کند، پس فقط $a=-۲$ قابل قبول است.

۸۹۱. گزینه‌ی ۱

نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را رسم کرده و قسمت‌هایی از نمودار که در دامنه‌ی تابع f قرار ندارد را حذف می‌کنیم:



با توجه به نمودار، برد تابع برابر است با:

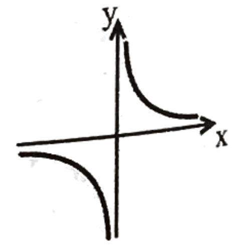
$$R_f=(-\infty,-۲)\cup[۳,+\infty)$$

بنابراین اعداد صحیح ۲، ۱، ۰، ۱-، ۲- در برد تابع قرار ندارند.

۸۹۲. گزینه‌ی ۳

هر یک از موارد را بررسی می‌کنیم:

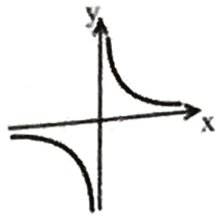
الف) درست است. با توجه به نمودار تابع که به‌صورت



است، در هر بازه‌ی دلخواه با افزایش مقادیر x، مقادیر y کاهش می‌یابد.

ب) درست است. تابع به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی به جز $x=۰$ تعریف شده است، پس: $D_f=R-\{۰\}$

پ) درست است. نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ به صورت

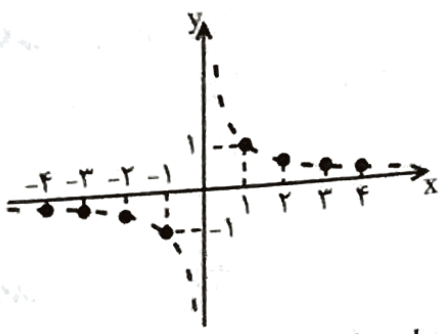


است که از نواحی اول و سوم عبور می‌کند.

ت) نادرست است. با توجه به نمودار، تابع محور xها را قطع نمی‌کند.

۸۹۳. گزینه‌ی ۲

برای رسم نمودار تابع f، نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را رسم کرده و نقاط با طول صحیح را روی آن مشخص می‌کنیم.

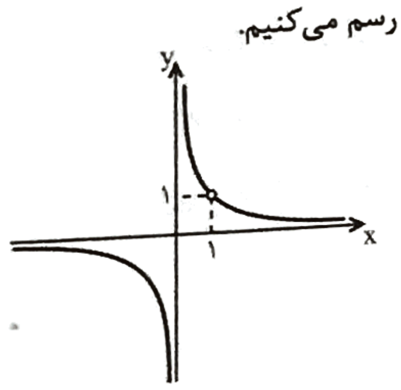


همانطور که ملاحظه می‌کنید برد این تابع شامل عددهای ±۱ است، بنابراین از آنجا که برد، زیرمجموعه‌ی هم‌دامنه است، دو عدد ±۱ باید عضو هم‌دامنه‌ی تابع هم باشند، اما در گزینه‌ی (۲) این اتفاق نمی‌افتد.

۸۹۴. گزینه‌ی ۳

نمودار تابع را با توجه به دامنه‌ی آن رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودار، برد تابع برابر است با $R-\{۰,۱\}$، بنابراین هم‌دامنه‌ی آن نیز $R-\{۰,۱\}$ است.



۸۹۵. گزینه‌ی ۲

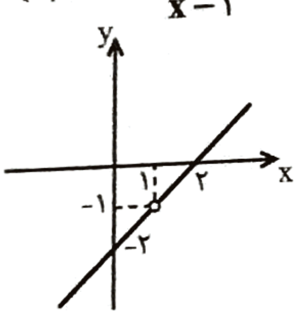
ابتدا دامنه‌ی تابع را مشخص کرده و سپس ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}$$

$$x-۱\neq ۰\Rightarrow x\neq ۱\Rightarrow D_f=R-\{۱\}$$

$$f(x)=\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=x-۲$$

نمودار تابع به صورت مقابل است:
بنابراین نمودار تابع از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.

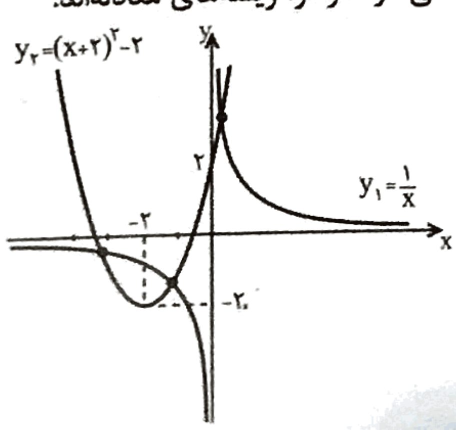


۸۹۶. گزینه‌ی ۲

ابتدا معادله‌ی داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(x+۲)^۲-۲=\frac{۱}{x}$$

نمودار دو تابع $y_۱=\frac{۱}{x}$ و $y_۲=(x+۲)^۲-۲$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی دو نمودار، ریشه‌های معادله‌اند.



با توجه به نمودار، دو تابع برای $x<۰$، دو نقطه‌ی تلاقی دارند، بنابراین معادله دو ریشه‌ی منفی دارد.

۸۹۷. گزینه‌ی ۱

مساحت مثلث برابر $S=\frac{1}{2}xy$ است، باید y را برحسب x بیابیم، با توجه به قضیه‌ی تالس در مثلث داریم:

$$\frac{y-1}{y}=\frac{2}{x}\Rightarrow xy-x=2y$$

$$\Rightarrow y(x-2)=x\to y=\frac{x}{x-2}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}xy\Rightarrow S(x)=\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{x-2}=\frac{x^2}{2x-4}$$

۸۹۸. گزینه‌ی ۱

کافی است مقدار تابع را به ازای $P=50$ بیابیم:

$$C(50)=\frac{80000\times 50}{100-50}=80000 \text{ تومان}$$

۸۹۹. گزینه‌ی ۱

ضابطه‌ی عملکرد پرتاب‌های موفق به صورت نسبت پرتاب‌های موفق به کل پرتاب‌ها تعریف می‌شود. در ابتدا این نسبت برابر با $\frac{5}{10}$ است زیرا از ۱۰ پرتاب او، ۵ پرتاب موفق بوده است. از این به بعد، همه‌ی پرتاب‌هایش موفق است، بنابراین به ازای هر x پرتاب، x پرتاب موفق دارد؛ لذا ضابطه‌ی عملکرد پرتاب‌های موفق او به‌صورت $f(x)=\frac{5+x}{10+x}$ درخواهد آمد که x تعداد پرتاب‌ها را نشان می‌دهد.

باید مقداری از x را بیابیم که به ازای آن $f(x)=\frac{75}{100}$ شود:

$$f(x)=\frac{75}{100}\Rightarrow\frac{5+x}{10+x}=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 20+4x=30+3x\Rightarrow x=10$$

بنابراین بعد از ۱۰ پرتاب، درصد موفقیت عملکرد او ۷۵ است.

۹۰۰. گزینه‌ی ۲

باید معادله‌ی $\frac{7}{10}=\frac{5t}{t^2+1}$ را حل کنیم:

$$7t^2+7=50t\Rightarrow 7t^2-50t+7=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{50\pm\sqrt{2500-196}}{2(7)}\Rightarrow t=\frac{50\pm\sqrt{2304}}{14}=\frac{50\pm 48}{14}$$

$$\xrightarrow{t>0}\begin{cases}t=\frac{50+48}{14}=7\\ t=\frac{50-48}{14}=\frac{1}{7}\end{cases}$$

در نتیجه پس از ۷ دقیقه برای بار دوم غلظت دارو به ۰/۷ میلی گرم بر لیتر می‌رسد. توجه کنید که دو بار مقدار غلظت دارو به ۰/۷ میلی‌گرم بر لیتر می‌رسد.

راهبرد حل تیپ (۱۱)

برای تعیین دامنه‌ی تابع رادیکالی، عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم. پس برای تعیین دامنه‌ی $y=\sqrt{f(x)}$ باید نامعادله‌ی $f(x)\geq 0$ را حل کنیم.

۹۰۱. گزینه‌ی ۱

$$f(-1)=\sqrt{2-(-1)-(-1)^2}=\sqrt{2}$$

پس باید $f(\sqrt{2})$ را بیابیم:

$$f(\sqrt{2})=\sqrt{2-\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2-\sqrt{2}-2}=\sqrt{-\sqrt{2}}$$

که تعریف نشده است.

۹۰۲. گزینه‌ی ۴

$$f(x)=a+\sqrt{x}\xrightarrow{f(4)=1}1=a+2\Rightarrow a=-1$$

بنابراین:

$$g(x)=\sqrt{x+2a}\xrightarrow{a=-1}g(x)=\sqrt{x-2}$$

با قرار دادن نقاط گزینه‌ها در تابع g دیده می‌شود که نقطه‌ی $E(18,5)$ در تابع g صدق نمی‌کند.

$$g(18)=\sqrt{18-2}=\sqrt{16}=4$$

۹۰۳. گزینه‌ی ۳

دامنهٔ تابع f را حساب می کنیم:

$$x+b\geq 0\Rightarrow x\geq -b$$

با توجه به نمودار، دامنه‌ی f به‌صورت $x\geq 3$ است، پس: $b=-3$.

تا اینجا ضابطه‌ی f به‌صورت $f(x)=a-\sqrt{x-3}$ به‌دست آمده است. تابع f از نقطه‌ی $(4,0)$ می‌گذرد، پس:

$$f(4)=0\Rightarrow a-1=0\Rightarrow a=1$$

ضابطه‌ی f به شکل $f(x)=1-\sqrt{x-3}$ می‌باشد، در بین گزینه‌ها، فقط نقطه‌ی $(39,-5)$ روی f قرار دارد.

۹۰۴. گزینه‌ی ۲

می‌دانیم دامنه‌ی تابع $f(x)$ برابر است با:

$$2x-10\geq 0\Rightarrow x\geq 5\Rightarrow D_f=[5,+\infty)$$

هم‌چنین:

$$g(x)=-3+\sqrt{x-a^2}\Rightarrow x-a^2\geq 0\Rightarrow D_g=[a^2,+\infty)$$

حال با مقایسه‌ی دامنه‌ی توابع f و g و نمایش آن‌ها بر روی محور اعداد و در نظر گرفتن اختلاف دامنه‌ی این دو، نتیجه می‌گیریم که a^2 می‌تواند یکی از دو مقدار ۱ و ۹ را اختیار کند.

$$\Rightarrow\begin{cases}a^2=1\Rightarrow a=\pm 1\\ a^2=9\Rightarrow a=\pm 3\end{cases}$$

بنابراین حداقل و حداکثر مقدار a، به‌ترتیب برابر با -3 و $+3$ است. در نتیجه:

$$3+(-3)=0$$

۹۰۵. گزینه‌ی ۲

دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$، مجموعه مقادیری از x می‌باشند که به‌ازای آن‌ها $ax^2+bx+c\geq 0$ باشد. با توجه به فرض سؤال دامنه‌ی تابع بازه‌ی $[-2,2]$ است، لذا جدول تعیین علامت تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ به شکل زیر خواهد بود:

x		-2		2	
y	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

از طرفی داریم:

$$f(0)=2\Rightarrow\sqrt{a(0)^2+b(0)+c}=\sqrt{c}=2\Rightarrow c=4$$

با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

$$\begin{cases}f(-2)=0\Rightarrow 4a-2b+4=0\\ f(2)=0\Rightarrow 4a+2b+4=0\end{cases}\Rightarrow a=-1,\ b=0$$

بنابراین:

$$a-b=-1$$

۹۰۶. گزینه‌ی ۴

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. پس:

$$(a^2-4)x^2+ax+6\geq 0 \quad (*)$$

مجموعه جواب این نامعادله بازه‌ی $(-\infty , b]$ است. می‌دانیم مجموعه جواب نامعادله‌ی درجه دوم هیچ‌گاه به صورت $(-\infty , b]$ نیست، بلکه به صورت $(-\infty , b]\cup[c , +\infty)$ یا $\{c\}$ یا R یا $\{\ \}$ یا $[b , c]$ می‌تواند باشد، (b و c ریشه‌های عبارت درجه ۲ هستند.) پس عبارت زیر رادیکال، درجه‌ی دوم نیست.

در نتیجه ضریب x^2 برابر صفر است: $a^2-4=0\Rightarrow a=\pm 2$

هر دو مقدار a را بررسی می‌کنیم:

$$1)\ a=2\xrightarrow{(*)}2x+6\geq 0$$
$$\Rightarrow x\geq -3\Rightarrow \text{مجموعه جواب}=[-3,+\infty)$$

با توجه به اینکه مجموعه جواب داده شده به صورت $(-\infty,b]$ است، پس این حالت قابل قبول نیست.

$$2)\ a=-2\xrightarrow{(*)}-2x+6\geq 0\Rightarrow x\leq 3\Rightarrow b=3$$

پس:

$$a+b=-2+3=1$$

۹۰۷. گزینه‌ی ۲

تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y=(\sqrt{x-2})^2$$

برای آن‌که رادیکال قابل تعریف باشد باید $x\geq 2$، بنابراین دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$D_y=[2 , +\infty)$$

۹۰۸. گزینه‌ی ۲

$$f(x)=\sqrt{\frac{5-x^2}{|x|}}$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس $\frac{5-x^2}{|x|}\geq 0$، برای تعیین علامت $\frac{5-x^2}{|x|}$ جدول سطری را تشکیل می‌دهیم. $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$ ریشه‌های ساده‌ی صورت کسرند بنابراین در آنها تغییر علامت داریم. عبارت مخرج همواره نامنفی است ولی چون در مخرج قرار دارد، کسر در $x=0$ تعریف نمی‌شود. با انتخاب عدد ۳ در بازه‌ی آخر، مقدار عبارت منفی است، بنابراین جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x		$-\sqrt{5}$		۰		$\sqrt{5}$	
$\frac{5-x^2}{\lvert x\rvert}$	−	۰	+	ت ن	+	۰	−

$$\Rightarrow D_f=[-\sqrt{5} , 0)\cup(0 , \sqrt{5}]$$

پس دامنه‌ی تابع f شامل اعداد صحیح ۲ ,۱ ,۱− ,۲− است.

۹۰۹. گزینه‌ی ۳

با تعیین علامت قدرمطلق، تابع را به یک تابع دوضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم و دامنه‌ی آن را می‌یابیم.

$$f(x)=\sqrt{\frac{|x|-1}{x-1}}=\begin{cases} y_1=\sqrt{\frac{x-1}{x-1}} & x\geq 0\\ y_2=\sqrt{\frac{-x-1}{x-1}}=\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} & x<0\end{cases}$$

ضابطه‌ی بالا به ازای $x=1$ تعریف نمی‌شود. بنابراین دامنه‌ی ضابطه‌ی بالا برابر است با:

$$D_{y_1}=[0 , +\infty)-\{1\}$$

در ضابطه‌ی پایین باید زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد. پس:

$$\frac{x+1}{1-x}\geq 0\Rightarrow -1\leq x<1\xrightarrow{x<0}-1\leq x<0$$
$$D_{y_2}=[-1 , 0)$$

دامنه‌ی تابع اجتماع این دو دامنه است:

$$D_{y_1}\cup D_{y_2}=([0 , +\infty)-\{1\})\cup[-1 , 0)$$
$$=[-1 , +\infty)-\{1\}$$

۹۱۰. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=\sqrt{|x-1|-2}$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد:

$$|x-1|-2\geq 0$$
$$\Rightarrow |x-1|\geq 2\Rightarrow\begin{cases}x-1\geq 2\Rightarrow x\geq 3\\ x-1\leq -2\Rightarrow x\leq -1\end{cases}$$

بنابراین دامنه‌ی تابع f برابر است با:

$$D_f=(-\infty , -1]\cup[3 , +\infty)$$

پس دامنه‌ی تابع شامل اعداد صحیح ۲، ۱ و صفر نیست.

۹۱۱. گزینه‌ی ۳

اولاً باید $x\geq 0$ باشد تا $\sqrt{x}$ تعریف شود. از طرفی:

$$\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}\geq 0\xrightarrow{\sqrt{y}\geq 0}\sqrt{x}\leq\sqrt{a}\to x\leq a$$

پس $D=[0 , a]$.

۹۱۲. گزینه‌ی ۴

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد. بنابراین:

$$xf(x)\geq 0 \quad (*)$$

از آنجا که نمودار تابع f در $x=1$، $x=-3$ و $x=2$ صفر شده است، جدول تعیین علامت عبارت فوق به‌صورت زیر خواهد بود:

	−۴		−۳		۰		۱		۲
x	‖	−		−	۰	+		+	
$f(x)$	‖	+	۰	−		−	۰	+	۰
$xf(x)$	‖	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰

پس مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(*)$ و در نتیجه دامنه‌ی عبارت داده شده برابر است با:

$$x\in[-3 , 0]\cup[1 , 2]$$

۹۱۳. گزینه‌ی ۱

حدود تغییرات تابع را با تشکیل آن می‌یابیم:

$$\sqrt{x-1}\geq 0\Rightarrow -\sqrt{x-1}\leq 0\Rightarrow y=-\sqrt{x-1}+2\leq 2$$

بنابراین برد تابع بازه‌ی $(-\infty , 2]$ است.

۹۱۴. گزینه‌ی ۳

مجموعه‌ی B باید طوری انتخاب شود که $R_f\subseteq B$. برد تابع را می‌یابیم:

$$x\geq 2\Rightarrow x-1\geq 1\Rightarrow\sqrt{x-1}\geq 1$$
$$\Rightarrow\sqrt{x-1}+1\geq 2\Rightarrow f(x)\geq 2\Rightarrow R_f=[2 , +\infty)$$

بنابراین مجموعه‌ی B، گزینه‌ی (۳) می‌تواند انتخاب شود.

۹۱۵. گزینه‌ی ۳

از آنجایی که باید $۳-x\ge ۰$، پس ورودی‌های این تابع باید زیرمجموعه‌ی $\{x : x\le ۳\}$ باشند. از طرفی $\sqrt{۳-x}\ge ۰$، پس خروجی‌های این مجموعه باید زیرمجموعه‌ی $\{y : y\ge ۰\}$ باشد. در

گزینه‌ی (۱): مجموعه‌ی B، اعداد منفی است و قابل قبول نیست.

گزینه‌ی (۲): دامنه‌ی تابع نمی‌تواند بازه‌ی $(-\infty , ۴]$ را بپذیرد.

گزینه‌ی (۳): به ازای $۰\le x\le ۱$ تغییرات تابع $\sqrt{۳-x}$ را می‌یابیم:

$$۰\le x\le ۱ \Rightarrow -۱\le -x\le ۰ \Rightarrow ۳-۱\le ۳-x\le ۰+۳$$

$$\Rightarrow ۲\le ۳-x\le ۳ \Rightarrow \sqrt{۲}\le\sqrt{۳-x}\le\sqrt{۳}$$

بنابراین برد تابع بازه‌ی $R_f=[\sqrt{۲} , \sqrt{۳}]$ خواهد بود که زیرمجموعه‌ی R^+ است و قابل قبول خواهد بود.

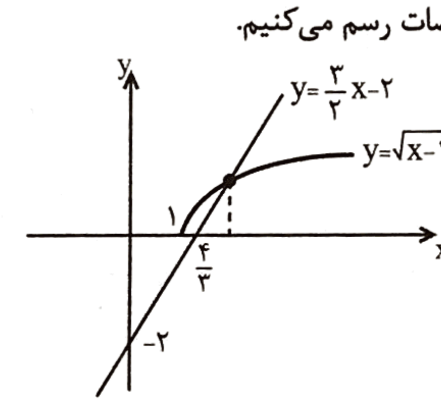
گزینه‌ی (۴): به ازای $x\le ۳$، $y\ge ۰$ است که زیرمجموعه‌ی R^+ نخواهد بود.

۹۱۶. گزینه‌ی ۱

$$۲\sqrt{x-۱}+۴=۳x \Rightarrow ۲\sqrt{x-۱}=۳x-۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-۱}=\frac{۳}{۲}x-۲$$

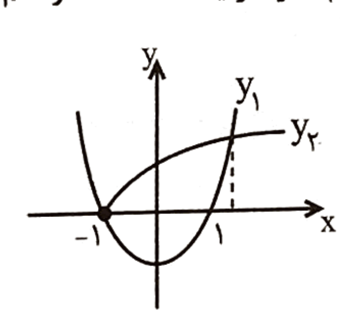
نمودار تابع رادیکالی $y=\sqrt{x-۱}$ و تابع خطی $y=\frac{۳}{۲}x-۲$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همانطور که ملاحظه می‌کنید نمودارهای این دو تابع در نقطه‌ای با طول بزرگتر از یک، همدیگر را قطع می‌کنند، یعنی معادله‌ی مورد نظر، فقط یک ریشه‌ی بزرگتر از یک دارد.

۹۱۷. گزینه‌ی ۳

نمودارهای $y_1=x^۲-۱$ و $y_2=\sqrt{x+۱}$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



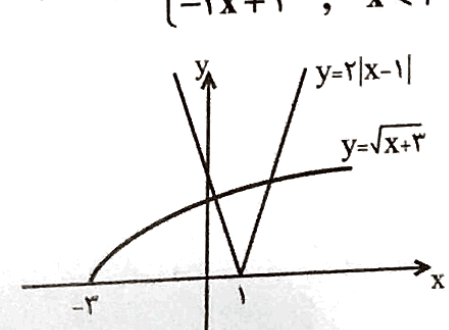
با توجه به نمودارها دیده می‌شود که دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، پس معادله دو ریشه دارد.

۹۱۸. گزینه‌ی ۲

$$\sqrt{x+۳}-۲|x-۱|=۰ \Rightarrow \sqrt{x+۳}=۲|x-۱|$$

نمودار تابع‌های $y=\sqrt{x+۳}$ و $y=۲|x-۱|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. توجه کنید که:

$$۲|x-۱|=\begin{cases}۲x-۲ & , \quad x\ge ۱\\ -۲x+۲ & , \quad x<۱\end{cases}$$



همانطور که ملاحظه می‌کنید نمودارهای این دو تابع در دو نقطه متقاطعند، پس معادله‌ی مورد نظر دو ریشه دارد.

۹۱۹. گزینه‌ی ۱

با انتقال افقی یک واحدی تابع f به سمت چپ، تابع با ضابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$g(x)=\sqrt{x+۱}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$g(x)=|x| \Rightarrow \sqrt{x+۱}=|x|$$

طرفین این معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow x+۱=x^۲ \Rightarrow x^۲-x-۱=۰$$

اگر ریشه‌های این معادله را x_1 و x_2 در نظر بگیریم، آنگاه:

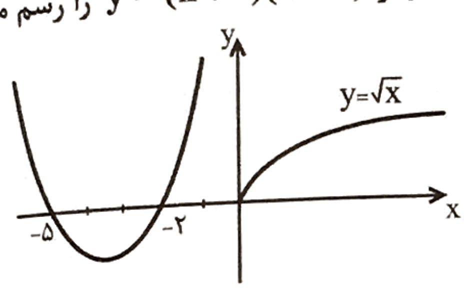
$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$\Rightarrow |x_1-x_2|=\frac{\sqrt{(-۱)^۲-۴(-۱)}}{۱}=\sqrt{۵}$$

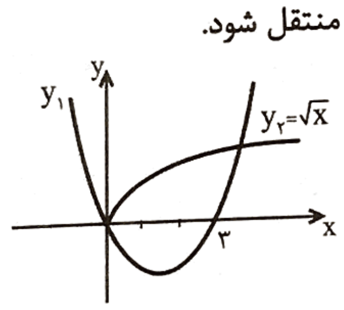
پس قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله برابر $\sqrt{۵}$ است.

۹۲۰. گزینه‌ی ۲

نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=(x+۲)(x+۵)$ را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارها، دو تابع هیچ نقطه‌ی تقاطعی ندارند. حال اگر منحنی درجه دوم را ۵ واحد به راست منتقل کنیم، تلاقی این دو منحنی یک نقطه به طول مثبت و نقطه‌ی دیگر مبدأ خواهد بود پس باید بیش از ۵ واحد به سمت راست منتقل شود.



راهبرد حل تیپ (۱۲)

توابعی که بخش‌های مختلف از دامنه‌ی آنها، با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند، توابع چندضابطه‌ای‌اند. در تابع چندضابطه‌ای، برای تعیین مقدار تابع، ابتدا باید مشخص کنیم که مقدار متغیر در دامنه‌ی کدام ضابطه قرار دارد.

• **نکته:** برای تعیین برد تابع چندضابطه‌ای، کافی است نمودار تابع را رسم کرده و از روی نمودار، برد را به دست آوریم.

۹۲۱. گزینه‌ی ۳

از آنجایی که $\sqrt{۲}+۱\ge ۱$، پس برای محاسبه‌ی $f(\sqrt{۲}+۱)$ از ضابطه‌ی بالایی استفاده می‌کنیم.

$$f(x)=x^۲-۲x=(x-۱)^۲-۱$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{۲}+۱)=(\sqrt{۲}+۱-۱)^۲-۱=۲-۱=۱$$

بنابراین $f(\sqrt{۲}+۱)=۱$.

از آنجایی که $f(-۳)=۱$، پس:

$$f(\sqrt{۲}+۱)=f(-۳)$$

۹۲۲. گزینه‌ی ۴

به ازای هر $x \geq ۰$، مقدار تابع ۲ است، پس:

$$f(۳)=۲$$

گزینه‌ی (۱): $f(۱)=۲$

گزینه‌ی (۲): $f(۰)=۲$

گزینه‌ی (۳): برای محاسبه‌ی $f(-۱)$ باید از ضابطه‌ی پایینی استفاده کنیم:

$$f(-۱)=-۱ \Rightarrow -۲f(-۱)=۲$$

$$f(-۲)=-۱ \Rightarrow ۲f(-۲)=-۲$$

گزینه‌ی (۴):
پس $f(۳)$ با $۲f(-۲)$ برابر نیست.

۹۲۳. گزینه‌ی ۴

با توجه به شرط هر ضابطه، مقادیر خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۵-۳=۲$$

$$\Rightarrow f(f(۵))=f(۲)=۲(۲)+۳=۷$$

$$f(۱)=۲(۱)+۳=۵ \Rightarrow f(f(۱))=f(۵)=۵-\sqrt{۵+۴}=۲$$

$$f(f(۵))+f(f(۱))=۷+۲=۹$$

۹۲۴. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x>۰ \\ ۱ & x\leq ۰ \end{cases}$$

به ازای هر x مقدار $f(x)$ مثبت است و در نتیجه $-f(x)$ منفی است، لذا باید در محاسبه $f(-f(x))$ از ضابطه‌ی پایینی استفاده کنیم،

بنابراین:

$$f(-f(x))=۱$$

۹۲۵. گزینه‌ی ۲

$$(-۱,۳)\in f \Rightarrow f(-۱)=۳$$

$$\xrightarrow[x<۰]{f(-۱)=۳} f(x)=ax-۳ \to ۳=-a-۳ \to a=-۶ \quad (۱)$$

$$\xrightarrow[x\geq ۰]{f(۲)=۵} f(x)=۲bx^۲+۷ \to ۵=۸b+۷ \to -۲=۸b$$

$$\Rightarrow b=\frac{-۱}{۴} \quad (۲)$$

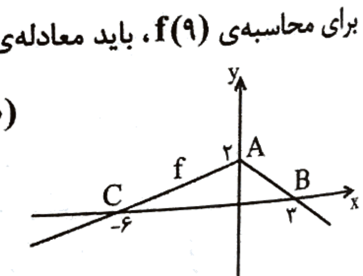
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} ab=(-۶)(\frac{-۱}{۴})=\frac{۳}{۲}$$

۹۲۶. گزینه‌ی ۳

مطابق شکل، تابع g یک تابع خطی است با شیب $\frac{۲-(-۲)}{۲-(-۲)}=۱$ و عرض از مبدأ صفر، پس معادله‌ی آن $g(x)=x$ است.

۹۲۷. گزینه‌ی ۳

برای محاسبه‌ی $f(۹)$، باید معادله‌ی خط AB را بیابیم.



$A(۰,۲)$ و $B(۳,۰)$ ،$C(-۶,۰)$

$$m_{AB}=\frac{۰-۲}{۳-۰}=\frac{-۲}{۳}$$

$$y-۲=\frac{-۲}{۳}(x-۰) \Rightarrow y=\frac{-۲}{۳}x+۲$$

بنابراین:

$$f(۹)=\frac{-۲}{۳}\times ۹+۲=-۴$$

همچنین برای محاسبه‌ی $f(-۱۲)$ باید معادله‌ی خط AC را بیابیم.

$$m_{AC}=\frac{۰-۲}{-۶-۰}=\frac{۱}{۳}$$

$$y-۲=\frac{۱}{۳}(x-۰) \Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+۲$$

$$f(-۱۲)=\frac{۱}{۳}\times(-۱۲)+۲=-۲$$

$$\Rightarrow f(۹)+f(-۱۲)=-۴-۲=-۶$$

۹۲۸. گزینه‌ی ۲

برای یافتن $f(۳)$ باید معادله‌ی پاره‌خط CD را بیابیم. با داشتن دو نقطه‌ی $C(۲,۰)$ و $D(۴,۳)$، شیب خط برابر است با:

$$m_{CD}=\frac{۳-۰}{۴-۲}=\frac{۳}{۲}$$

پس معادله‌ی پاره خط CD برابر است با:

$$y-۳=\frac{۳}{۲}(x-۴) \Rightarrow y-۳=\frac{۳}{۲}x-۶$$

$$\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x-۳ \Rightarrow f(۳)=\frac{۳}{۲}(۳)-۳=\frac{۳}{۲}$$

همچنین برای یافتن $f(۰)$، معادله‌ی پاره‌خط BC را می‌یابیم.

$$B(-۳,۲) \text{ و } C(۲,۰) \Rightarrow m_{BC}=\frac{۲-۰}{-۳-۲}=\frac{-۲}{۵}$$

پس معادله‌ی پاره‌خط BC برابر است با:

$$y-۰=\frac{-۲}{۵}(x-۲) \Rightarrow y=\frac{-۲}{۵}x+\frac{۴}{۵}$$

در نتیجه:

$$f(۰)=۰+\frac{۴}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین:

$$f(۳)+f(۰)=\frac{۳}{۲}+\frac{۴}{۵}=\frac{۲۳}{۱۰}=۲/۳$$

۹۲۹. گزینه‌ی ۱

از روی نمودار، معادله‌ی این تابع را می‌نویسیم:

برای x های بزرگ‌تر یا مساوی صفر نمودار یک سهمی با رأس $(۱,۱)$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$y=a(x-۱)^۲+۱$$

$$\xrightarrow{(۰,۲)\in f} ۲=a(۰-۱)^۲+۱ \Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow y=(x-۱)^۲+۱$$

و برای x های منفی خطی داریم که از دو نقطه‌ی $(۰,۱)$ و $(-\frac{۱}{۲},۰)$ می‌گذرد:

$$\frac{x}{\frac{-۱}{۲}}+\frac{y}{۱}=۱ \Rightarrow y=۲x+۱$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} (x-۱)^۲+۱ & , \ x\geq ۰ \\ ۲x+۱ & , \ x<۰ \end{cases}$$

$$f(۳)=(۳-۱)^۲+۱=۵ \ , \ f(۴)=(۴-۱)^۲+۱=۱۰$$

$$f(-۱)=۲(-۱)+۱=-۱ \ , \ f(-۳/۵)=۲(-۳/۵)+۱=-۶$$

بنابراین:

$$\frac{f(۳)-f(۴)}{-f(-۱)+f(-۳/۵)}=\frac{۵-۱۰}{-(-۱)-۶}=\frac{-۵}{-۵}=۱$$

۹۳۰. گزینه‌ی ۲

با توجه به نمودار، برای $x>-2$، نمودار، یک سهمی با رأس $(-1,3)$ است، پس با توجه به ضابطه‌ی پایینی تابع داریم: $a=-1$

برای $x<-2$، تابع ثابت $y=2$ است، بنابراین از ضابطه‌ی بالایی تابع داریم:

$$y=2\Rightarrow a+c=2\xrightarrow{a=-1}c=3\quad(*)$$

در نقطه‌ی $x=-2$، مقدار تابع برابر با صفر است، بنابراین از ضابطه‌ی وسطی تابع داریم:

$$f(-2)=0\Rightarrow 4b+2c+2b=0\Rightarrow 3b+c=0\xrightarrow[c=3]{(*)}b=-1$$

۹۳۱. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=\begin{cases}y_1=\dfrac{5x+1}{x+3} & ,\ x\ge 0\\[2mm] y_2=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x-3} & ,\ x<0\end{cases}$$

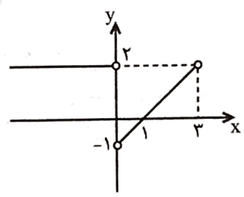
ضابطه‌ی بالا به ازای هر مقدار نامنفی x قابل تعریف است، توجه کنید که ریشه‌ی مخرج در بازه‌ی $[0,+\infty)$ قرار ندارد.

ضابطه‌ی پایین به ازای هر مقدار منفی x قابل تعریف است، زیرا رادیکال صورت به ازای هر مقدار منفی x قابل تعریف و ریشه‌ی مخرج نیز در بازه‌ی $(-\infty,0)$ قرار ندارد. بنابراین دامنه‌ی تابع اجتماع دو بازه‌ی زیر است:

$$D_{y_1}\cup D_{y_2}=[0,+\infty)\cup(-\infty,0)=\mathbb{R}$$

۹۳۲. گزینه‌ی ۲

از روش ترسیم استفاده می‌کنیم. به ازای $x<0$، نمودار $y_1=2$ و به ازای $0<x<3$، نمودار تابع $y_2=x-1$ را رسم می‌کنیم.

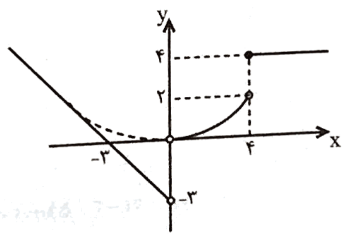


بنابراین برد تابع بازه‌ی $(-1,2]$ است که شامل اعداد صحیح صفر، ۱ و ۲ است. پس برد، شامل ۳ عدد صحیح است.

۹۳۳. گزینه‌ی ۲

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}-x-3 & ,\ x<0\\ \dfrac{1}{8}x^2 & ,\ 0<x<4\\ 4 & ,\ x\ge 4\end{cases}$$

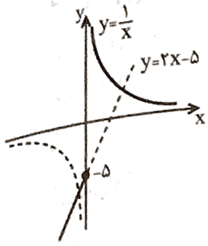


با توجه به نمودار، برد تابع بازه‌ی $(-3,+\infty)$ است.

۹۳۴. گزینه‌ی ۴

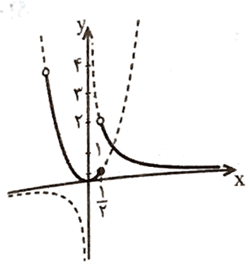
نمودار تابع را رسم می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا هر ضابطه را بدون در نظر گرفتن شرط آن به صورت خط‌چین رسم کرده و برای اعمال شرط، قسمت‌های مطلوب را به خط کامل تبدیل می‌کنیم.

همانطور که در شکل ملاحظه می‌کنید برد این تابع برابر است با $(-\infty,-5]\cup(0,+\infty)$ که شامل عددهای صحیح ۰، ۱-، ۲-، ۳- و ۴- نیست.



۹۳۵. گزینه‌ی ۳

نمودار تابع را رسم می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا هر یک از ضابطه‌ها را رسم کرده و سپس با توجه به دامنه‌ی هر ضابطه، نمودار را در بازه‌ی داده شده نگه می‌داریم و بقیه‌ی نمودار را حذف می‌کنیم.

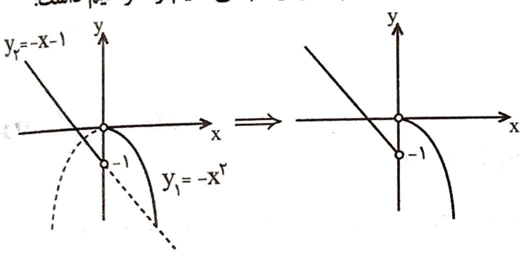


با توجه به نمودار، برد تابع برابر است با: $R_f=[0,4)$

بنابراین برد شامل اعداد صحیح صفر، ۱، ۲ و ۳ است.

۹۳۶. گزینه‌ی ۳

از روش ترسیم استفاده می‌کنیم. به ازای $x>0$، تابع $y_1=-x^2$ و به ازای $x<0$، تابع $y_2=-x-1$ را رسم می‌کنیم و خواهیم داشت:



پس برد تابع مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

۹۳۷. گزینه‌ی ۲

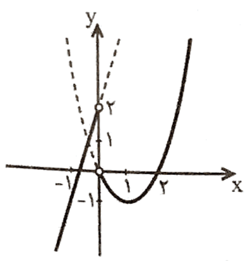
هر یک از ضابطه‌ها را برابر با ۲ قرار داده و مقدار x را می‌یابیم. اگر مقدار به دست آمده در دامنه‌ی ضابطه‌ی مربوطه قرار داشت، آن جواب قابل قبول خواهد بود.

$$f(x)=\begin{cases}2x+1=2\Rightarrow x=\dfrac12\xrightarrow{-1\le x<1}\text{قابل قبول است.}\\[2mm] x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt2\xrightarrow{1\le x<2}\text{فقط }\sqrt2\text{ قابل قبول است.}\\[2mm] 5-2x=2\Rightarrow x=\dfrac32\xrightarrow{x>2}\text{غیر قابل قبول است.}\end{cases}$$

بنابراین در نقاط $\sqrt2$ و $x=\frac12$ مقدار تابع برابر با ۲ می‌شود.

۹۳۸. گزینه‌ی ۲

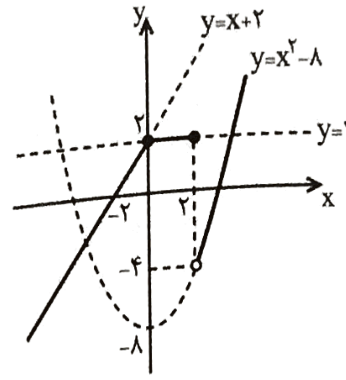
نمودار تابع را رسم می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا هر یک از ضابطه‌ها را رسم می‌کنیم و سپس با توجه به دامنه‌ی هر ضابطه، نمودار را در بازه‌ی داده شده نگه می‌داریم و بقیه‌ی نمودار را حذف می‌کنیم.



با توجه به نمودار، تابع محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.

۹۳۹. گزینه‌ی ۳

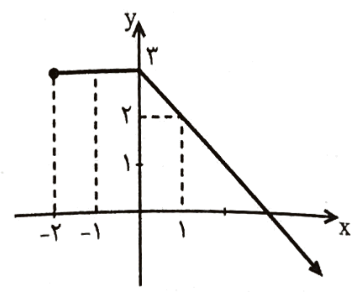
نمودار تابع را رسم می‌کنیم. برای این منظور ابتدا هر کدام از ضابطه‌ها را رسم کرده و سپس با توجه به دامنه‌ی هر ضابطه، نمودار را در بازه‌ی داده شده نگه داشته و بقیه‌ی نمودار را حذف می‌کنیم.



همانطور که ملاحظه می‌شود، نمودار تابع محور xها را در دو نقطه قطع کرده است، پس گزینه‌ی (۳) نادرست است.

۹۴۰. گزینه‌ی ۱

با توجه به توضیحات مسأله، نمودار تابع f به صورت زیر است:



دو نقطه از قسمت خطی تابع را داریم، بنابراین ضابطه‌ی تابع برای $x\geq ۰$ به صورت زیر است:

$$x\geq ۰ \xrightarrow[(۰,۳)\in f]{(۱,۲)\in f} y-۳=\frac{۳-۲}{۰-۱}(x)\Rightarrow f(x)=-x+۳$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} ۳ & , \quad -۲\leq x\leq ۰ \\ -x+۳ & , \quad x\geq ۰ \end{cases}$$

برای محاسبه‌ی $f(۳)$ از ضابطه‌ی پایینی تابع استفاده می‌کنیم:

$$f(۳)=-۳+۳=۰$$

راهبرد حل تیپ (۱۳)

تابع پله‌ای شامل چند تابع ثابت با دامنه‌ی محدود شده است که برد آن برابر با اجتماع مقادیر تابع‌های ثابت است.

مثال:

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & ۰\leq x<۱ \\ ۲ & ۲<x\leq ۳ \\ ۱ & ۳<x<۴ \end{cases} \qquad D_f=[۰,۱)\cup(۲,۴) \quad R_f=\{-۱,۲,۱\}$$

۹۴۱. گزینه‌ی ۲

بنا به تعریف تابع پله‌ای باید بتوانیم دامنه‌ی تابع را به تعدادی بازه تقسیم کنیم که تابع روی هرکدام از این بازه‌ها ثابت باشد.

گزینه‌ی (۱): ضابطه‌ی بالایی ثابت نیست، پس تابع پله‌ای نیست.

گزینه‌ی (۳): ضابطه‌ی بالایی و پایینی ثابت نیستند، پس تابع پله‌ای نیست.

گزینه‌ی (۴): ضابطه‌ی پایینی ثابت نیست، پس تابع پله‌ای نیست.

در گزینه‌ی (۲)، داریم:

$$x<-۱ : f(x)=\frac{x}{|x|}$$

$$x<-۱ \xrightarrow{\text{منفی } x} |x|=-x \Rightarrow f(x)=\frac{x}{-x}=-۱$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -۱ & ; \quad x<-۱ \\ ۰ & ; \quad -۱\leq x<۲ \end{cases}$$

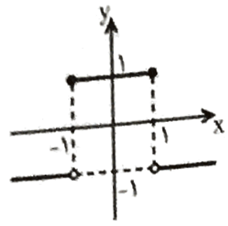
ملاحظه می‌کنید در این گزینه، هر دو ضابطه ثابت هستند.

۹۴۲. گزینه‌ی ۲

ضابطه‌ی تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} -۱ & , \quad x>۱ \text{ یا } x<-۱ \\ ۱ & , \quad -۱\leq x\leq ۱ \end{cases}$$

بنابراین به ازای xهای کوچکتر از ۱- و بزرگتر از ۱، مقدار تابع برابر با ۱- است و به ازای xهای بین ۱ و ۱- و $x=۱,-۱$ مقدار تابع برابر با یک است.



راهبرد حل تیپ (۱۴)

جزء صحیح هر عدد صحیح برابر با خود آن عدد است:

$$x\in Z\Rightarrow [x]=x$$

هر عدد غیر صحیح بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد و جزء صحیح آن عدد برابر است با عدد صحیح کوچکتر.

$$x\notin Z , k<x<k+1\Rightarrow [x]=k \text{ ، } k\in Z$$

• نکته‌ی ۱: برای حل معادله‌های جزء صحیح، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$[x]=k\Rightarrow k\leq x<k+1$$

• نکته‌ی ۲: اگر $k\in Z$، آنگاه $[x+k]=[x]+k$. از این رابطه می‌توان برای ساده کردن عبارت‌های شامل جزء صحیح استفاده کرد.

۹۴۳. گزینه‌ی ۴

از آنجایی که منظور از جزء صحیح یک عدد، بزرگترین عدد صحیحی است که از خود عدد بزرگتر نباشد، پس:

$$\left|[-\frac{۷}{۲}]-|[-\frac{۵}{۲}]|\right|=\left|[-۳/۵]-|[-۲/۵]|\right|$$

$$=\left|-۴-|-۳|\right|=|-۷|=۷$$

۹۴۴. گزینه‌ی ۳

$$\sqrt{۲}=۱/۴\Rightarrow ۱-\sqrt{۲}=-۰/۴\Rightarrow ۰<(۱-\sqrt{۲})^۶<۱$$

$$(۱+\sqrt{۲})^۶+(۱-\sqrt{۲})^۶=۱۹۸$$

از آنجایی که $(۱-\sqrt{۲})^۶$ عددی بین صفر و یک است پس:

$$\Rightarrow (۱+\sqrt{۲})^۶=۱۹۸-(\text{عددی بین صفر و یک})$$

$$\Rightarrow (۱+\sqrt{۲})^۶=۱۹۷/\ldots\Rightarrow [(۱+\sqrt{۲})^۶]=۱۹۷$$

یادآوری: می‌دانیم که اگر عددی بین ۱- و صفر باشد آنگاه توان زوج آن، بین صفر و ۱ است، یعنی:

$$-۱<x<۰\Rightarrow ۰<x^{۲n}<۱ , n\in N$$

۹۴۵. گزینه‌ی ۲

می‌دانیم که اگر $[u]=k$، $k\in Z$ آنگاه $k\leq u<k+1$، پس:

$$[x^۲+x]=-۱\Rightarrow -۱\leq x^۲+x<۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۱\leq x^۲+x \Rightarrow x^۲+x+۱\geq ۰ & \text{همواره برقرار است. (چرا؟)} \\ x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰ \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} -۱<x<۰ \end{cases}$$

یعنی از $[x^۲+x]=-۱$، نتیجه می‌شود که $-۱<x<۰$، پس:

$$-۱<x<۰\Rightarrow ۰<x^{۲۰}<۱\Rightarrow [x^{۲۰}]=۰$$

۹۴۶. گزینه‌ی ۱

$$x^۲+x<۰\Rightarrow x(x+۱)<۰\Rightarrow -۱<x<۰$$

$$-۱<x<۰\Rightarrow [x]=-۱$$

$$-۱<x<۰\Rightarrow ۰<x^۲<۱\Rightarrow [x^۲]=۰$$

$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow -۱ < x^۳ < ۰ \Rightarrow [x^۳] = -۱$$

$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow ۰ < x^۴ < ۱ \Rightarrow [x^۴] = ۰$$

پس:

$$[x]+[x^۲]+[x^۳]+[x^۴] = -۱+۰-۱+۰ = -۲$$

یادآوری: می‌دانیم اگر عددی بین ۱- و صفر باشد، آنگاه توان فرد آن نیز، بین ۱- و صفر است، یعنی:

$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow -۱ < x^{۲n+۱} < ۰ , n \in N$$

۹۴۷. گزینه‌ی ۳

راه حل اول: به ازای هر عدد طبیعی n، داریم:

$$۴n^۲ - ۴n + ۱ < ۴n^۲ - ۳n + ۱ < ۴n^۲$$

$$\Rightarrow (۲n-۱)^۲ < ۴n^۲ - ۳n + ۱ < (۲n)^۲$$

$$\Rightarrow ۲n - ۱ < \sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱} < ۲n$$

$$\Rightarrow [\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] = ۲n - ۱$$

از طرفی به ازای هر عدد طبیعی n که $n > ۲$، داریم:

$$n^۲ - ۴n + ۴ < n^۲ - ۲n < n^۲ - ۲n + ۱$$

$$\Rightarrow (n-۲)^۲ < n^۲ - ۲n < (n-۱)^۲$$

$$\Rightarrow n - ۲ < \sqrt{n^۲ - ۲n} < n - ۱ \Rightarrow [\sqrt{n^۲ - ۲n}] = n - ۲$$

پس برای هر عدد طبیعی n که $n > ۲$، می توان نوشت:

$$[\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] - ۲[\sqrt{n^۲ - ۲n}] = (۲n-۱) - ۲(n-۲) = ۳$$

راه حل دوم: حاصل عبارت را به ازای یک عدد طبیعی بزرگتر از ۲ محاسبه کنید:

$$n = ۳$$

$$\Rightarrow [\sqrt{۴n^۲ - ۳n + ۱}] - ۲[\sqrt{n^۲ - ۲n}] = [\sqrt{۲۸}] - ۲[\sqrt{۳}]$$
$$= ۵ - ۲ \times ۱ = ۳$$

$$\text{توجه}: \begin{cases} ۲۵ < ۲۸ < ۳۶ \Rightarrow ۵ < \sqrt{۲۸} < ۶ \Rightarrow [\sqrt{۲۸}] = ۵ \\ ۱ < ۳ < ۴ \Rightarrow ۱ < \sqrt{۳} < ۲ \Rightarrow [\sqrt{۳}] = ۱ \end{cases}$$

۹۴۸. گزینه‌ی ۳

$$[\frac{x-۳}{۲}] = ۱ \Rightarrow ۱ \le \frac{x-۳}{۲} < ۲ \Rightarrow ۲ \le x - ۳ < ۴$$

$$\Rightarrow ۵ \le x < ۷$$

$$\Rightarrow ۶ \le x + ۱ < ۸$$

$$\Rightarrow ۳ \le \frac{x+۱}{۲} < ۴ \Rightarrow [\frac{x+۱}{۲}] = ۳$$

۹۴۹. گزینه‌ی ۲

$$[x+\frac{۱}{۲}] + [x+\frac{۳}{۲}] = ۳ \Rightarrow [x+\frac{۱}{۲}] + [x+\frac{۱}{۲}+۱] = ۳$$

$$\Rightarrow [x+\frac{۱}{۲}] + [x+\frac{۱}{۲}] + ۱ = ۳ \Rightarrow ۲[x+\frac{۱}{۲}] = ۲$$

$$\Rightarrow [x+\frac{۱}{۲}] = ۱ \Rightarrow ۱ \le x + \frac{۱}{۲} < ۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \le x < \frac{۳}{۲} \Rightarrow [a , b) = [\frac{۱}{۲} , \frac{۳}{۲})$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲} = ۲$$

۹۵۰. گزینه‌ی ۲

$$[|x|+۱] = ۱ \Rightarrow [|x|] + ۱ = ۱ \Rightarrow [|x|] = ۰ \Rightarrow ۰ \le |x| < ۱$$
$$\Rightarrow -۱ < x < ۱$$

مجموعه جواب معادله به صورت $(-۱,۱)$ است. بنابراین $a = -۱$ و $b = ۱$ و در نتیجه: $b - a = ۱ - (-۱) = ۲$.

۹۵۱. گزینه‌ی ۳

$$|[x]| < ۱ \Rightarrow -۱ < [x] < ۱$$

می‌دانیم مقدار $[x]$ عددی صحیح است و تنها عدد صحیح در فاصله‌ی ۱- تا ۱، صفر است، بنابراین:

$$[x] = ۰ \Rightarrow ۰ \le x < ۱$$

۹۵۲. گزینه‌ی ۱

$$[x] + \frac{۱}{۲}x = ۱ \Rightarrow [x] = ۱ - \frac{۱}{۲}x \quad (*)$$

از آنجا که حاصل جزء صحیح یعنی طرف چپ معادله‌ی فوق، همواره عددی صحیح است، پس طرف راست نیز باید همواره عددی صحیح باشد. برای آنکه عبارت $۱ - \frac{۱}{۲}x$ عددی صحیح شود، باید x عددی زوج باشد، یعنی: $x = ۲k$ و $k \in Z$، بنابراین:

$$\xrightarrow[x=۲k]{(*)} [۲k] = ۱ - \frac{۱}{۲}(۲k) \Rightarrow ۲k = ۱ - k \Rightarrow k = \frac{۱}{۳}$$

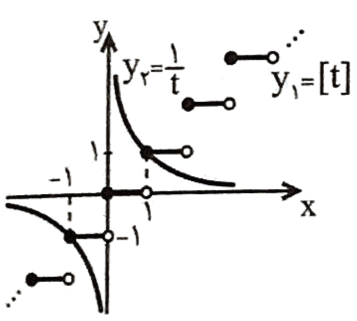
$k = \frac{۱}{۳}$ غیر قابل قبول است زیرا $k \in Z$، بنابراین معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۹۵۳. گزینه‌ی ۳

فرض کنید $t = x^۲ - ۱$ باشد. در این صورت $t[t] = ۱$ است. یعنی $[t] = \frac{۱}{t}$ با شرط $t \neq ۰$.

نمودار توابع $y_۱ = [t]$ و $y_۲ = \frac{۱}{t}$ را رسم می‌کنیم.

مطابق شکل، نمودار دو تابع تنها در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- با هم برخورد می‌کنند.



$$t = ۱ \Rightarrow x^۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$

$$t = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۱ = -۱ \Rightarrow x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

پس تعداد ریشه‌های معادله ۳ تاست.

راهبرد حل تیپ (۱۵)

تابعی که به هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌گویند و با ضابطه‌ی $f(x) = [x]$ نمایش می‌دهند.

۹۵۴. گزینه‌ی ۱

$$f(x) = [x] + [\frac{x}{x+۱}]$$

$$\to f(-\sqrt{۳}) = [-\sqrt{۳}] + [\frac{-\sqrt{۳}}{-\sqrt{۳}+۱}]$$

از آنجا که $۱ < \sqrt{۳} < ۲$، بنابراین $-۲ < -\sqrt{۳} < -۱$؛ در نتیجه:

$$[-\sqrt{۳}] = -۲$$

برای محاسبه‌ی $[\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}]$، ابتدا مخرج را گویا می‌کنیم.

$$\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

$$1<\sqrt{3}<2 \xrightarrow{+3} 4<3+\sqrt{3}<5$$

$$\xrightarrow{\div 2} 2<\frac{3+\sqrt{3}}{2}<2/5$$

بنابراین $[\frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}]=2$، در نتیجه:

$$f(-\sqrt{3})=-2+2=0$$

۹۵۵. گزینه‌ی ۱

با توجه به اینکه:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ;\ x\in Z\\ -1 & ;\ x\notin Z\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\xrightarrow[\frac{1}{\sqrt{3}}\notin Z]{\frac{\sqrt{2}}{2}\notin Z} f(\frac{\sqrt{2}}{2})+f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{-1}+\frac{1}{-1}=-2$$

۹۵۶. گزینه‌ی ۱

$$f(x-f(x))=f(x-[x])=[x-[x]]$$

اما $0\le x-[x]<1$ است، پس:

$$f(x-f(x))=0$$

۹۵۷. گزینه‌ی ۲

ابتدا توجه کنید که $\sqrt{3}\approx 1/7$، پس:

$$f(x)=x^2-2[x]$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2-2[\sqrt{3}]=3-2\times 1=1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}f(\sqrt{3})=-\frac{1}{2}\times 1=-0/5$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))=(-0/5)^2-2[-0/5]$$

$$\Rightarrow f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))=0/25-2(-1)=2/25$$

۹۵۸. گزینه‌ی ۲

دامنه‌ی تابع f مجموعه‌ی اعداد حقیقی است به جز مقادیری که مخرج را صفر می‌کنند، پس:

$$x-[x]\ne 0\Rightarrow x\ne[x]\Rightarrow x\notin Z$$

بنابراین:

$$D_f=R-Z$$

۹۵۹. گزینه‌ی ۲

در تابع، جزء صحیح x را داریم. پس دو حالت برای x در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $x\in Z$

$$x\in Z\Rightarrow -x\in Z\Rightarrow[-x]=-x$$

بنابراین: $f(x)=\sqrt{x+[-x]}=\sqrt{x+(-x)}=0$

حالت دوم: $x\notin Z$

$$x\notin Z\Rightarrow[-x]=-[x]-1$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x+[-x]}=\sqrt{x-[x]-1}$$

از طرفی می‌دانیم: $0\le x-[x]<1$، بنابراین:

$$-1\le x-[x]-1<0$$

پس به ازای مقادیر غیرصحیح x، عبارت زیر رادیکال همواره منفی است، پس دامنه‌ی تابع فقط اعداد صحیح‌اند که به ازای آنها، مقدار تابع همواره برابر با صفر است، بنابراین:

$$R_f=\{0\}$$

۹۶۰. گزینه‌ی ۲

می‌دانیم $0\le u-[u]<1$ با تشکیل ضابطه، حدود تغییرات برد را می‌یابیم:

$$y=x-\frac{1}{k}[kx]\Rightarrow y=\frac{1}{k}(kx-[kx])$$

$$0\le kx-[kx]<1\Rightarrow 0\le\frac{1}{k}(kx-[kx])<\frac{1}{k}$$

بنابراین برد تابع بازه‌ی $[0,\frac{1}{k})$ است.

راهبرد حل تیپ (۱۶)

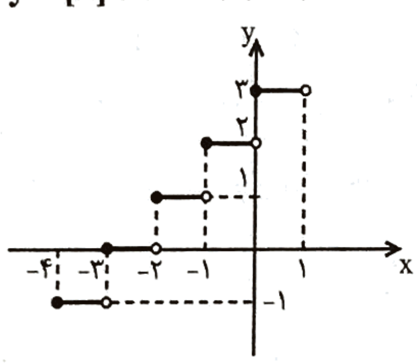
برای رسم نمودار یک تابع جزء صحیح باید بازه‌ها را به‌گونه‌ای در نظر بگیریم که در آن بازه، به جزء صحیح، تنها یک مقدار نسبت داده شود.

در نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[ax]$ طول هر پله $\frac{1}{|a|}$ و ارتفاع هر پله نیز ۱ است. $(a\ne 0)$

۹۶۱. گزینه‌ی ۴

نمودار تابع f را در فاصله‌ی $[-4,1)$ رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases}-4\le x<-3\Rightarrow y=[x]+3=-4+3=-1\\ -3\le x<-2\Rightarrow y=[x]+3=-3+3=0\\ -2\le x<-1\Rightarrow y=[x]+3=-2+3=1\\ -1\le x<0\Rightarrow y=[x]+3=-1+3=2\\ 0\le x<1\Rightarrow y=[x]+3=0+3=3\end{cases}$$



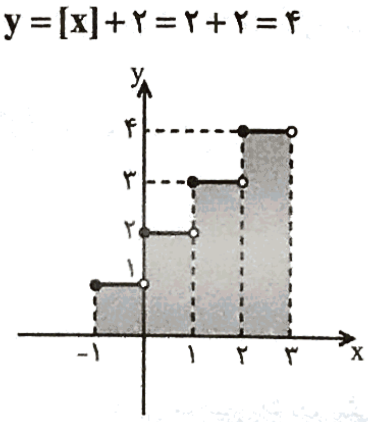
با توجه به نمودار، تابع f از ناحیه‌ی چهارم عبور نمی‌کند.

۹۶۲. گزینه‌ی ۴

ابتدا نمودار تابع را در فاصله‌ی $[-1,3)$ رسم می‌کنیم. توجه کنید که:

$$[x+2]=[x]+2$$

$$\begin{cases}-1\le x<0\Rightarrow y=[x]+2=-1+2=1\\ 0\le x<1\Rightarrow y=[x]+2=0+2=2\\ 1\le x<2\Rightarrow y=[x]+2=1+2=3\\ 2\le x<3\Rightarrow y=[x]+2=2+2=4\end{cases}$$

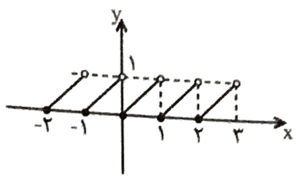


مساحت بین نمودار و محور xها برابر با مساحت قسمت سایه زده شده است، بنابراین:

$$S=1\times 1+1\times 2+1\times 3+1\times 4=10$$

۹۶۳. گزینه‌ی ۴

نمودار تابع را در فاصله‌ی $[-۲,۳)$ رسم می‌کنیم، در این بازه تابع از پنج پاره‌خط به اندازه‌ی $\sqrt{۲}$ تشکیل شده است.



۹۶۴. گزینه‌ی ۲

اگر $x\in[\frac{۱}{۲},۲)$، آنگاه سه حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$(۱)\ \frac{۱}{۲}\le x<۱\Rightarrow ۱\le x+\frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۲}$$
$$[x]=۰\qquad [x+\frac{۱}{۲}]=۱\ \Rightarrow f(x)=۱$$

$$(۲)\ ۱\le x<\frac{۳}{۲}\Rightarrow \frac{۳}{۲}\le x+\frac{۱}{۲}<۲$$
$$[x]=۱\qquad [x+\frac{۱}{۲}]=۱\ \Rightarrow f(x)=۲$$

$$(۳)\ \frac{۳}{۲}\le x<۲\Rightarrow ۲\le x+\frac{۱}{۲}<\frac{۵}{۲}$$
$$[x]=۱\qquad [x+\frac{۱}{۲}]=۲\ \Rightarrow f(x)=۳$$

بنابراین در بازه‌ی $[\frac{۱}{۲},۲)$ تابع f از سه پاره‌خط تشکیل شده است.

۹۶۵. گزینه‌ی ۲

راه حل اول: $x\in[-۲,۶)$ یا $-۲\le x<۶$، باید این بازه را به صورت چند بازه‌ی جدا از هم بنویسیم که در هر یک از آن‌ها، یک مقدار برای $\left[\frac{x}{۲}\right]$ به‌دست آید، برای این منظور حدود تغییرات $\frac{x}{۲}$ را می‌یابیم:

$$-۲\le x<۶\Rightarrow -۱\le\frac{x}{۲}<۳$$

بنا بر تعریف جزء صحیح، چهار بازه و چهار پاره‌خط مساوی خواهیم داشت، به عنوان نمونه توجه کنید:

$$(۱)\ -۱\le\frac{x}{۲}<۰\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]=-۱$$
$$-۲\le x<۰\Rightarrow y=۲(-۱)+۱=-۱$$
$$(۲)\ ۰\le\frac{x}{۲}<۱\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]=۰$$
$$۰\le x<۲\Rightarrow y=۲\times۰+۱=۱$$

راه حل دوم: در تابع $f(x)=[ax]$، طول هر پله $\frac{۱}{|a|}$ است، پس در تابع $f(x)=۲\left[\frac{x}{۲}\right]+۱$، طول هر پله ۲ است، از آن‌جایی‌که طول بازه‌ی $[-۲,۶)$، ۸ واحد است، پس تابع در این بازه، ۴ پله با طول مساوی خواهد داشت.

۹۶۶. گزینه‌ی ۳

می‌دانیم که اگر k عددی صحیح باشد، آنگاه $[u+k]=[u]+k$.
پس:

$$y=\frac{۱}{۴}[۴x+۳]=\frac{۱}{۴}([۴x]+۳)=\frac{۱}{۴}[۴x]+\frac{۳}{۴}$$

هر گزینه که در آن برای $[۴x]$ تنها یک مقدار به دست آید، جواب است.

گزینه‌ی (۱):

$$x\in[۰,۱)\Rightarrow۰\le x<۱\Rightarrow۰\le۴x<۴$$
$\Rightarrow[۴x]=$ ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳

گزینه‌ی (۲):

$x\in[\frac{۱}{۲},۱)\Rightarrow\frac{۱}{۲}\le x<۱\Rightarrow۲\le۴x<۴\Rightarrow[۴x]=$ ۲ یا ۳

گزینه‌ی (۳):

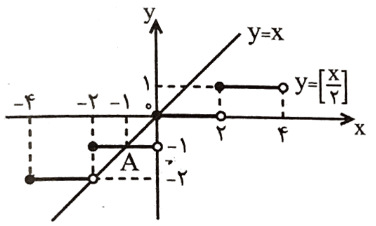
$$x\in\left[\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲}\right)\Rightarrow۱\le۴x<۲\Rightarrow[۴x]=۱$$
$\Rightarrow$ تابع در این بازه، یک قطعه است.

گزینه‌ی (۴):

$$x\in\left[۰,\frac{۳}{۴}\right)\Rightarrow۰\le x<\frac{۳}{۴}\Rightarrow۰\le۴x<۳$$
$\Rightarrow[۴x]=$ ۰ یا ۱ یا ۲

۹۶۷. گزینه‌ی ۱

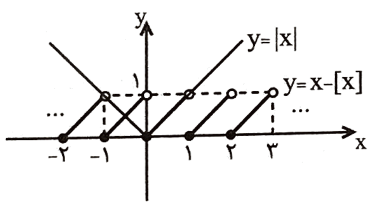
نمودار دو تابع $y=\left[\frac{x}{۲}\right]$ (که در متن درسنامه، شیوه‌ی رسم نمودار آن توضیح داده شده است) و $y=x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همانطور که ملاحظه می‌کنید این دو نمودار در دو نقطه‌ی $O(۰,۰)$ و $A(-۱,-۱)$ مشترک هستند. پس تنها در یک نقطه غیر از مبدأ، مشترک هستند.

۹۶۸. گزینه‌ی ۴

نمودارهای دو تابع $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همانطور که ملاحظه می‌کنید اگر $۰\le x<۱$، آنگاه نمودار دو تابع f و g بر هم منطبقند و بنابراین دو تابع، بی‌شمار نقطه‌ی مشترک دارند.

۹۶۹. گزینه‌ی ۱

از حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$، طول نقطه‌های مشترک نمودارهای دو تابع f و g به دست می‌آید؛ این معادله را حل می‌کنیم.

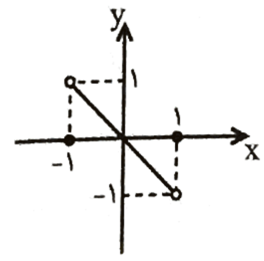
$$\begin{cases}f(x)=x-[x]\\g(x)=x+[x]\end{cases}\xrightarrow{f(x)=g(x)}x-[x]=x+[x]$$
$$\Rightarrow-[x]=[x]\Rightarrow۲[x]=۰\Rightarrow[x]=۰$$
$$\Rightarrow۰\le x<۱$$

۹۷۰. گزینه‌ی ۴

با توجه به اینکه $y=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & , x\in Z\\ -1 & , x\notin Z\end{cases}$، ضابطه‌ی تابع را در بازه‌ی $-1\le x\le 1$ به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=x([x]+[-x])=\begin{cases}x\times 0=0 & , x=-1,0,1\\ x\times(-1)=-x & , -1<x<0 \text{ یا } 0<x<1\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر است:



راهبرد حل تیپ (۱۷)

برای تساوی دو تابع، ابتدا باید دامنه‌ی دو تابع برابر باشد. پس از برابری دامنه‌ها، برابر بودن ضابطه‌ها را بررسی می‌کنیم.

مثال: دو تابع $f(x)=x+1$ و $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ مساوی نیستند زیرا دامنه‌ی آنها برابر نیست:

$D_f=R$ و $D_g=R-\{1\}$

• نکته: دو تابع به صورت زوج مرتب، در صورتی با هم برابرند که به عنوان دو مجموعه با هم برابر باشند.

مثال: دو تابع $f=\{(0,1),(1,1)\}$ و $g=\{(0,1),(1,(-1)^4)\}$ با هم برابرند.

۹۷۱. گزینه‌ی ۳

دو تابع مساوی‌اند، پس:

$$\begin{cases}(1,a^2)\in f\\ (1,4)\in g\end{cases}\xrightarrow{f=g} a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

$$\xrightarrow[(a,5)\in g]{(-2,5)\in f} a=-2$$

۹۷۲. گزینه‌ی ۲

دو تابع f و g در صورتی برابرند که اولاً دامنه‌ی هر دو تابع با هم برابر باشد، ثانیاً به ازای هر x از دامنه داشته باشیم:

$f(x)=g(x)$

ابتدا دامنه‌ی تابع f را تعیین کرده و سپس آن را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-2}$$

$x-2\ne 0\Rightarrow x\ne 2\Rightarrow D_f=R-\{2\}$

$\Rightarrow f(x)=x-2$ و $x\ne 2$

بنابراین تابع f با تابع گزینه‌ی (۲) برابر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): دامنه‌ی تابع، R است که با دامنه‌ی تابع f برابر نیست.

گزینه‌ی (۳): دامنه‌ی تابع f و g برابر $R-\{2\}$ است ولی ضابطه‌ها برابر نیست، زیرا:

$$g(x)=\frac{|x-2|}{x-2}=\begin{cases}\frac{x-2}{x-2} & , x>2\\ \frac{-(x-2)}{x-2} & , x<2\end{cases}=\begin{cases}1 & , x>2\\ -1 & , x<2\end{cases}$$

گزینه‌ی (۴): دامنه‌ی تابع، $R-\{-2\}$ است که با دامنه‌ی تابع f برابر نیست.

۹۷۳. گزینه‌ی ۳

دو تابع مساوی‌اند، پس:

$$f(x)=g(x)\xrightarrow{x\ne 0}\frac{ax^2+bx}{x}=x-2$$

$$\Rightarrow x^2-2x=ax^2+bx\Rightarrow a=1, b=-2$$

$$\Rightarrow (a,b)=(1,-2)$$

۹۷۴. گزینه‌ی ۱

$$x\ne -1: f(x)=\frac{x^3+1^3}{x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}=x^2-x+1$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2-x+1 & ; x\ne -1\\ b & ; x=-1\end{cases}$$

$$g(x)=x^2+ax+1$$

از آنجا که دو تابع f و g با هم برابرند، از مقایسه‌ی x^2-x+1 با x^2+ax+1 داریم: $a=-1$. برای یافتن مقدار b هم داریم:

$$g(x)=x^2-x+1\Rightarrow g(-1)=(-1)^2-(-1)+1=3$$

$$\xrightarrow{f(-1)=g(-1)} b=3\Rightarrow a+b=-1+3=2$$

۹۷۵. گزینه‌ی ۲

با توجه به نمودار، تابع f برای $x\ne 1$ یک سهمی است که محور xها را در $x=0$ و $x=-2$ قطع کرده است و $f(1)=n$، پس ضابطه‌ی آن برابر است با:

$$f(x)=\begin{cases}a(x-0)(x-(-2)) & , x\ne 1\\ n & , x=1\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x^2+bx+c & , x\ne 1\\ 4 & , x=1\end{cases}$$

از آنجا که $f(x)=g(x)$، پس داریم:

$$\begin{cases}f(1)=g(1)\Rightarrow n=4\\ ax(x+2)=x^2+bx+c\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ x^2+2x=x^2+bx+c\\ \Rightarrow b=2, c=0\end{cases}\end{cases}$$

بنابراین: $n+b+c=4+2+0=6$.

۹۷۶. گزینه‌ی ۲

دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{-x^3}$ برابر است با:

$$-x^3\ge 0\Rightarrow x^3\le 0\Rightarrow x\le 0$$

پس دامنه‌ی تابع اعداد حقیقی نامثبت است، بنابراین این تابع نمی‌تواند با تابع گزینه‌های (۳) و (۴) برابر باشد، زیرا دامنه‌ی آنها اعداد حقیقی نامنفی‌اند.

در تابع گزینه‌ی (۲) داریم:

$$y=-x\sqrt{-x}=\sqrt{(-x)^2(-x)}=\sqrt{(-x)^3}=\sqrt{-x^3}$$

پس تابع داده شده با تابع گزینه‌ی (۲) برابر است.

۹۷۷. گزینه‌ی ۱

ابتدا دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{x-|x|}$ را می‌یابیم:

$$x-|x|\ge 0\Rightarrow\begin{cases}\text{اگر } x\ge 0\rightarrow x-(x)=0\ge 0 & \checkmark\\ \text{اگر } x<0\rightarrow x-(-x)=2x<0 & \times\end{cases}$$

بنابراین دامنه‌ی تابع برابر با اعداد حقیقی نامنفی است و تابع برابر است با:

$$y=0\ ,\ D=[0,+\infty)$$

در تابع گزینه‌ی (۱) داریم:

$$y=\sqrt{|x|-x}$$

$$|x|-x\ge 0\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x\ge 0} x-x\ge 0\Rightarrow 0\ge 0 & ✓\\ \xrightarrow{x<0} -x-x\ge 0\Rightarrow -2x\ge 0 & ✓\end{cases}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع برابر است با:

$$y=\begin{cases}0 & x\ge 0\\ \sqrt{-2x} & x<0\end{cases}$$

پس تابع $y=\sqrt{x-|x|}$ در بازه‌ی $[0,+\infty)$ بر تابع $y=\sqrt{|x|-x}$ منطبق است.

۹۷۸. گزینه‌ی ۴

دامنه و ضابطه‌ی هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. اگر دامنه و ضابطه‌ی هر دو تابع برابر باشند، آنگاه دو تابع مساوی‌اند.

گزینه‌ی (۱):

$$\begin{cases}f(x)=\sqrt[4]{x^4}=|x|\\ g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x\end{cases}\Rightarrow f(x)\ne g(x)$$

گزینه‌ی (۲):

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}\to D_f=R-\{0\}\\ g(x)=1\to D_g=R\end{cases}\Rightarrow f(x)\ne g(x)$$

گزینه‌ی (۳):

$$\begin{cases}f(x)=(\sqrt{x})^2\to D_f=[0,+\infty)\\ g(x)=x\to D_g=R\end{cases}\Rightarrow f(x)\ne g(x)$$

گزینه‌ی (۴):

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}\\ g(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow f(x)=g(x)$$

۹۷۹. گزینه‌ی ۳

ضابطه‌ی تابع را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$f(x)=||4x|-2|x||=|4|x|-2|x||=|2|x||=|2x|$$

بنابراین این تابع با تابع گزینه‌ی (۳) برابر است.

۹۸۰. گزینه‌ی ۲

می‌دانیم اگر k عددی صحیح باشد، آنگاه $[u+k]=[u]+k$، پس $[x+3]=[x]+3$، بنابراین نمودار دو تابع $y=[x+3]$ و $y=[x]+3$ بر هم منطبقند.

راهبرد حل تیپ (۱۸)

یک معادله برحسب x و y زمانی یک تابع y برحسب x را مشخص می‌کند که به ازای هر x مجاز، تنها یک y برای معادله حاصل شود.

۹۸۱. گزینه‌ی ۲

در یک تابع، هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نیستند.

در گزینه‌ی (۱)، مؤلفه‌های اول همه‌ی زوج‌های مرتب، $\frac{1}{2}$ است، پس تابع نیست:

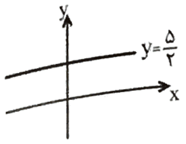
$$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

در گزینه‌ی (۳)، دو زوج مرتب $(1,1)$ و $(1,-1)$ در معادله صدق می‌کنند، پس تابع نیست.

در گزینه‌ی (۴)، $x=0$ هم در ضابطه‌ی بالایی و هم در ضابطه‌ی پایینی قرار دارد. از ضابطه‌ی بالایی، مقدار y به ازای $x=0$ برابر با ۲ است و از ضابطه‌ی پایینی مقدار y به ازای $x=0$ برابر -7 است، یعنی $(0,2)$ و $(0,-7)$ هر دو در معادله صدق می‌کنند، بنابراین تابع نیست.

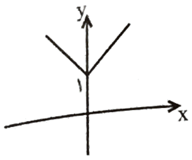
گزینه‌ی (۲)، یک تابع ثابت را مشخص می‌کند، یعنی مؤلفه‌های دوم همه‌ی زوج‌های مرتب آن $y=\frac{5}{2}$ است.

شکل روبه‌رو نمودار این تابع را نشان می‌دهد.



۹۸۲. گزینه‌ی ۱

در گزینه‌ی (۱) داریم $y-|x|=1$، پس $y=|x|+1$ که ضابطه‌ی یک تابع قدر مطلقی است و نمودار آن به شکل روبه‌روست.



بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه‌ی (۲):

$$x-|y|=1\xrightarrow{x=2}|y|=1\Rightarrow y=\pm 1$$

برای یک x، دو y به دست آمد، پس تابع نیست.

گزینه‌ی (۳):

$$|x|+|y|=1\xrightarrow{x=0}|y|=1\Rightarrow y=\pm 1$$

برای یک x، دو y به دست آمد، پس تابع نیست.

گزینه‌ی (۴):

$$|x|-|y|=1\xrightarrow{x=2}|y|=1\Rightarrow y=\pm 1$$

برای یک x، دو y به دست آمد، پس تابع نیست.

۹۸۳. گزینه‌ی ۲

گزینه‌ی (۱): به ازای $x=1$، دو مقدار $y=0$ و $y=2$ حاصل می‌شود.

گزینه‌ی (۳): به ازای $x=0$، دو مقدار $y=3$ و $y=1$ حاصل می‌شود.

گزینه‌ی (۴): به ازای $x=0$ دو مقدار $y=2$ و $y=-2$ به دست می‌آید، پس این روابط تابع نیستند.

۹۸۴. گزینه‌ی ۲

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): مجموع دو مقدار نامنفی صفر شده پس باید هر کدام صفر باشند. لذا:

$$\begin{cases}|x|=0\Rightarrow x=0\\ |y-5|=0\Rightarrow y=5\end{cases}\Rightarrow f=\{(0,5)\}$$

بنابراین رابطه‌ی داده شده یک تابع است.

گزینه‌ی (۲): به ازای $x=2$، به معادله‌ی $|y-1|=1$ می‌رسیم که دو مقدار $y=2$ و $y=0$ برای y حاصل می‌شود، پس تابع نیست.

گزینه‌ی (۳): دو عدد $\frac{x}{y},\frac{y}{x}$ $(x,y\ne 0)$ عکس هم هستند می‌دانیم اگر $a+\frac{1}{a}=2$ آن‌گاه $a=1$ بنابراین:

$$\frac{x}{y}=1\Rightarrow y=x\quad (x,y\ne 0)$$

تابع است.

گزینه‌ی (۴): سمت چپ، اتحاد مربع دوجمله‌ای است یعنی:

$$x^2-2xy+y^2=0\Rightarrow(x-y)^2=0\Rightarrow y=x$$

پس تابع است.

۹۸۵. **گزینه‌ی ۱**

گزینه‌ی (۱): دامنه‌ی تابع $x=۰$ است، زیرا:

$$f(x)=\sqrt{x}\pm\sqrt{-x}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$x\ge ۰ \cap -x\ge ۰ \Rightarrow D_f=\{۰\}$$

در نتیجه $R_f=\{۰\}$، پس رابطه‌ی داده شده یک تابع است.

گزینه‌ی (۲): تابع نیست زیرا، به ازای $x=۱$ ، $y^۲-y=۰$ و از آن‌جا دو مقدار $y=۰$ و $y=۱$ به‌دست می‌آید، یعنی یک مقدار x، دو مقدار برای y می‌دهد و رابطه‌ی داده شده تابع نیست.

گزینه‌ی (۳): سمت چپ، مجموع دو مقدار نامنفی است، بنابراین $y\ge ۰$ و از آنجا:

$$|x|+y=y\Rightarrow|x|=۰\Rightarrow x=۰$$

معادله‌ی خط $x=a$، تابع نیست.

گزینه‌ی (۴): به ازای $x=۱$ برای y دو مقدار حاصل می‌شود:

$$x=۱:۱+y^۲-۲=۰\Rightarrow y^۲=۱\Rightarrow y=\pm۱$$

پس تابع نیست.

۹۸۶. **گزینه‌ی ۲**

گزینه‌ی (۱): به ازای $x=۰$ داریم:

$$y^۲+\sqrt{۰}=۱\Rightarrow y^۲=۱\Rightarrow y=\pm۱$$

برای یک x، بیش از یک مقدار y به‌دست آمد، پس تابع نیست.

گزینه‌ی (۲): سمت چپ، مجموع دو مقدار نامنفی است، بنابراین $y\ge ۰$ و از آنجا:

$$|x|+|۲y|=y\Rightarrow|x|+۲y=y$$

$$\Rightarrow y=-|x|\xrightarrow{y\ge۰} x=y=۰$$ تابع است

گزینه‌ی (۳): به ازای $x=۰$ داریم:

$$|۰|+|y|=۱\Rightarrow|y|=۱\Rightarrow y=\pm۱$$

برای یک x، بیش از یک مقدار y به‌دست آمد، پس تابع نیست.

گزینه‌ی (۴): به ازای $x=-۱$ داریم:

$$|y|-۱=۰\Rightarrow|y|=۱\Rightarrow y=\pm۱$$

برای یک x، بیش از یک مقدار y به‌دست آمد، پس تابع نیست.

۹۸۷. **گزینه‌ی ۴**

گزینه‌ی (۱): با فرض $x=-۲$ در رابطه، به معادله‌ی $\sqrt{y+۲}=y+۲$ می‌رسیم، که دو جواب دارد. از آن جایی که به ازای $x=-۲$ دو مقدار برای y به دست آمده، پس این رابطه، یک تابع نیست.

گزینه‌ی (۲): با فرض $x=۱$ در رابطه، به معادله‌ی $y^۳-۴y=۰$ می‌رسیم، خواهیم داشت:

$$y^۳-۴y=۰\Rightarrow y(y^۲-۴)=۰$$

$$\Rightarrow y=۰\,,\, y=۲\,,\, y=-۲$$

از آن جایی که به ازای $x=۱$ سه مقدار برای y به دست آمده، پس این رابطه، یک تابع نیست.

گزینه‌ی (۳): با فرض $x=۰$ در رابطه، به معادله‌ی $|۲y+۱|+y=۰$ می‌رسیم، با حل این معادله خواهیم داشت:

$$|۲y+۱|=-y\xrightarrow{y\le۰}(۲y+۱)^۲=y^۲$$

$$\Rightarrow ۴y^۲+۴y+۱=y^۲\Rightarrow ۳y^۲+۴y+۱=۰$$

در این معادله $a+c=b$ است، پس:

$$y=-۱ \quad \text{و} \quad y=\frac{-۱}{۳}$$

از آن جایی که به ازای $x=۰$ دو مقدار برای y به دست آمده، پس این رابطه، یک تابع نیست.

گزینه‌ی (۴): ابتدا با ضابطه‌بندی داریم:

$$x=y^۳+y+|y|=\begin{cases}y^۳+۲y & y\ge۰\\ y^۳ & y<۰\end{cases}$$

که در هر حالت به ازای هر $x\in R$ فقط یک y حقیقی پیدا می‌شود.

۹۸۸. **گزینه‌ی ۴**

الف) رابطه‌ی $x=[y]$ یک تابع از x به y نیست، زیرا با انتخاب $x=۰$ داریم $[y]=۰$، پس $۰\le y<۱$، یعنی یک x به بی‌شمار y می‌رود و تابع نیست.

ب) رابطه‌ی $\sqrt{x}=\sqrt{|y|}$ یک تابع از x به y نیست. زیرا با انتخاب $x=۱$ داریم $\sqrt{|y|}=۱$، پس $|y|=۱$ در نتیجه $y=۱$ یا $y=-۱$ یعنی یک x به دو y می‌رود و تابع نیست.

۹۸۹. **گزینه‌ی ۳**

$x=۲$ هم در دامنه‌ی ضابطه‌ی بالایی تابع قرار دارد، هم در دامنه‌ی ضابطه‌ی پایینی. برای اینکه f تابع باشد، باید مقدار هر دو ضابطه به ازای $x=۲$ برابر باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} x=۲\xrightarrow[f(x)=۲x+a]{\text{ضابطه‌ی بالا}} f(۲)=۲(۲)+a=۴+a \\ x=۲\xrightarrow[f(x)=x-۳a]{\text{ضابطه‌ی پایین}} f(۲)=۲-۳a\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۴+a=۲-۳a\Rightarrow ۴a=-۲\Rightarrow a=\frac{-۱}{۲}$$

برای محاسبه‌ی $f(۱)$ از ضابطه‌ی پایین استفاده می‌کنیم:

$$f(۱)=۱-۳a=۱-۳(\frac{-۱}{۲})=\frac{۵}{۲}$$

۹۹۰. **گزینه‌ی ۴**

هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): در رابطه‌ی $(-۱)^x+(-۱)^y=۲$ به ازای $x=۰$ حداقل دو مقدار $y=۰$ و $y=۲$ را خواهیم داشت، پس این رابطه تابع نیست.

گزینه‌ی (۲): در رابطه‌ی $y^۳-y=x$ به ازای $x=۰$ سه مقدار $y=-۱$ ، $y=۰$ و $y=۱$ را خواهیم داشت، پس این رابطه تابع نیست.

گزینه‌ی (۳): در رابطه‌ی $y=\begin{cases}۳x-۱ & x\ge۱\\ x+۲ & x<۲\end{cases}$ به ازای $x=۱$ دو مقدار $y=۲$ و $y=۳$ را خواهیم داشت، بنابراین این رابطه تابع نیست.

گزینه‌ی (۴): در رابطه‌ی $|x-۳|+|y-۱|=۰$ مجموع دو مقدار نامنفی صفر شده است، پس هر کدام باید برابر با صفر باشند:

$$\begin{cases}|x-۳|=۰\Rightarrow x=۳\\ |y-۱|=۰\Rightarrow y=۱\end{cases}$$

پس این رابطه شامل یک زوج مرتب $(۳,۱)$ است که یک تابع را نمایش می‌دهد.

راهبرد حل تیپ (۱۹)

تابعی یک‌به‌یک است که به هر عضو از برد، فقط یک عضو از دامنه نظیر شده باشد. بنابراین در نمایش‌های مختلف تابع، می‌توان یک‌به‌یک بودن تابع را به صورت زیر مشخص کرد:

نمایش تابع	تشخیص یک‌به‌یک بودن تابع
زوج مرتبی	مؤلفه‌های دوم همگی متمایز باشند.
پیکانی	حداکثر یک پیکان به هر عضو مجموعه‌ی دوم وارد شده باشد.
نموداری	هر خط موازی محور x ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. (آزمون خط افقی)

تذکر: اگر ضابطه‌ی تابعی داده شده باشد، می‌توان نمودار آن را رسم کرد و از آزمون خط افقی برای تعیین یک‌به‌یک بودن آن استفاده کرد.

۹۹۱. گزینه‌ی ۲

ابتدا تابع داده شده را به‌صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب می‌نویسیم:

$$f = \{(a^۲+۱ , ۵) , (a+۳ , ۵) , (۲ , ۳)\}$$

هنگامی یک تابع، یک‌به‌یک است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های دوم برابر نباشند، بنابراین داریم:

$$(a^۲+۱ , ۵) = (a+۳ , ۵) \Rightarrow a^۲+۱ = a+۳$$

$$\Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۲ \text{ یا } a = -۱$$

با این مقادیر a شرط تابع بودن را بررسی می‌کنیم:

$$a = ۲ \Rightarrow f = \{(۵,۵),(۲,۳)\}$$

$$a = -۱ \Rightarrow f = \{(۲,۵),(۲,۳)\}$$

همان‌طور که دیده می‌شود به ازای $a = -۱$ نمودار داده شده تابع نخواهد بود، بنابراین فقط $a = ۲$ قابل قبول است.

۹۹۲. گزینه‌ی ۴

در تابع یک به یک، اگر دو زوج مرتب متمایز، مؤلفه‌های دوم برابر داشته باشند، باید مؤلفه‌های اول نیز برابر باشند، بنابراین:

$$(m , ۳) = (-۱ , ۳) \Rightarrow m = -۱$$

$$f = \{(-۲ , ۲) , (-۱ , ۳) , (-۲ , a)\}$$

همچنین با شرط تابع بودن خواهیم داشت:

$$(-۲ , ۲) = (-۲ , a) \Rightarrow a = ۲$$

۹۹۳. گزینه‌ی ۴

از شرط تابع بودن، باید هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه‌ی اول برابر نداشته باشند، پس:

$$(۳,۲) = (۳,a^۲ - a) \Rightarrow a^۲ - a = ۲ \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (a-۲)(a+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ a = -۱ \end{cases}$$

$a = -۱$ قابل قبول نیست، زیرا در دو زوج مرتب متمایز $(a , ۵)$ و $(-۱ , ۴)$، مؤلفه‌های اول برابر خواهند شد، بنابراین $a = ۲$ خواهد بود.

همچنین هنگامی تابع یک‌به‌یک است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه‌ی دوم برابر نداشته باشند، پس:

$$(۳ , ۲) = (b , ۲) \Rightarrow b = ۳ \Rightarrow (a , b) = (۲ , ۳)$$

۹۹۴. گزینه‌ی ۲

با توجه به شرط داده شده، مقدار(های) a را می‌یابیم:

$$f(۴) - ۳f(۲) = -۲ \Rightarrow a^۲ - ۳a = -۲ \Rightarrow a^۲ - ۳a + ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (a-۲)(a-۱) = ۰ \Rightarrow a = ۲ \; , \; a = ۱$$

با این مقادیر a، یک‌به‌یک بودن تابع را بررسی می‌کنیم:

$$a = ۱ \Rightarrow f = \{(۲ , ۱) , (۴ , ۱) , (۱ , b-۱)\} \Rightarrow \text{یک به‌یک نیست}$$

$$a = ۲ \Rightarrow f = \{(۲ , ۲) , (۴ , ۴) , (۲ , b-۱)\}$$

با توجه به شرط تابع بودن f، باید زوج مرتب‌های $(۲,۲)$ و $(۲,b-۱)$ با یک‌دیگر برابر باشند، بنابراین:

$$(۲ , ۲) = (۲ , b-۱) \Rightarrow ۲ = b-۱ \Rightarrow b = ۳$$

$$a + b = ۲ + ۳ = ۵$$

۹۹۵. گزینه‌ی ۳

هنگامی تابع f یک تابع یک‌به‌یک است که دامنه‌ی تابع نیز مانند برد آن، سه عضوی باشد. چون $a^۲$ مقداری بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، پس فقط $a^۲ = ۱$ می‌تواند برقرار باشد، یعنی a می‌تواند یکی از دو مقدار -۱ یا ۱ را داشته باشد.

۹۹۶. گزینه‌ی ۳

با توجه به نمودار، تابع f به صورت زیر است:

$$f = \{(-۲ , ۱) , (۱ , ۵) , (۴ , ۳), (۷ , -۲)\}$$

با اضافه کردن نقاط داده شده، خواهیم داشت:

$$f = \{(-۲ , ۱) , (۱ , ۵) , (۴ , ۳), (۷ , -۲) , (m , ۴) , (۷ , m^۲ - ۳m) , (n+۱ , -۲)\}$$

برای تابع بودن، هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه‌ی اول برابر داشته باشند، بنابراین:

$$(۷ , m^۲ - ۳m) = (۷ , -۲) \Rightarrow m^۲ - ۳m = -۲$$

$$\Rightarrow m^۲ - ۳m + ۲ = ۰ \Rightarrow (m-۱)(m-۲) = ۰ \Rightarrow m = ۱ , m = ۲$$

با قرار دادن $m = ۱$، دو زوج مرتب $(۱ , ۵)$ و $(۱ , ۴)$ را خواهیم داشت که در این صورت f تابع نیست، پس $m = ۲$ قابل قبول است.

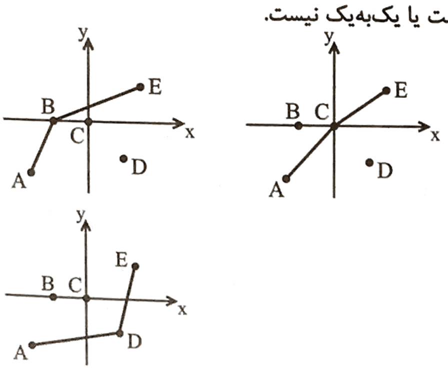
از طرفی برای یک به یک بودن، هیچ دو زوج مرتب متمایزی نباید مؤلفه‌ی دوم برابر داشته باشند، بنابراین:

$$(۷ , -۲) = (n+۱ , -۲) \Rightarrow n+۱ = ۷ \Rightarrow n = ۶$$

بنابراین: $m - n = ۲ - ۶ = -۴$.

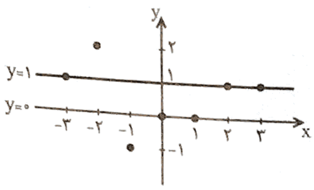
۹۹۷. گزینه‌ی ۱

در صورتی یک تابع یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. با وصل کردن نقاط ABE، ACE و ADE سه تابع یک‌به‌یک ساخته خواهد شد. با وصل کردن هر سه نقطه‌ی متوالی به غیر از اینها، نموداری ساخته خواهد شد که یا تابع نیست یا یک‌به‌یک نیست.



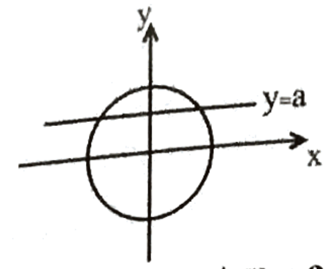
۹۹۸. گزینه‌ی ۱

خط $y = ۱$ نمودار تابع را در سه نقطه قطع می‌کند، پس باید حداقل دو نقطه از این سه نقطه حذف شوند، همچنین خط $y = ۰$ نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند، پس باید حداقل یک نقطه از این دو نقطه حذف شود تا تابع یک‌به‌یک شود. بنابراین در مجموع باید حداقل ۳ نقطه از نمودار حذف شود.

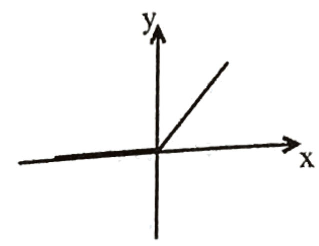


۹۹۹. گزینه‌ی ۲

خط $y=۰$ با نمودار تابع، در دو نقطه مشترک است.
گزینه‌ی (۳)



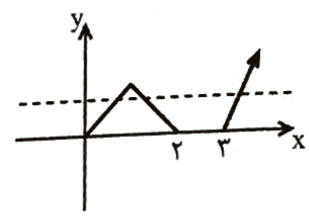
خط $y=a$ با نمودار، در دو نقطه مشترک است، در ضمن این شکل یک تابع را نیز مشخص نمی‌کند.
گزینه‌ی (۱)



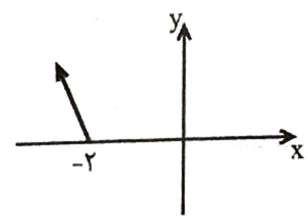
خط $y=۰$ با نمودار تابع، بی‌شمار نقطه‌ی مشترک دارد.
گزینه‌ی (۴)

۱۰۰۰. گزینه‌ی ۲

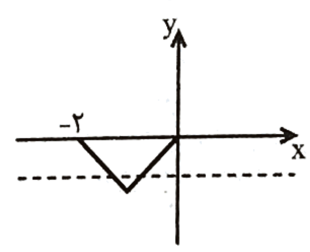
نمودار تابع را در هر یک از نواحی مختصات به‌طور جداگانه رسم می‌کنیم:



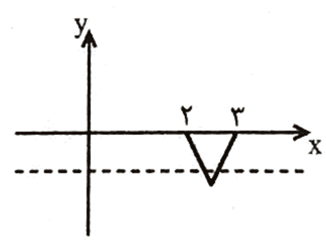
نمودار در ناحیه‌ی اول: تابع در این ناحیه یک‌به‌یک نیست زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.



نمودار در ناحیه‌ی دوم: تابع در این ناحیه یک‌به‌یک است زیرا هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.



نمودار در ناحیه‌ی سوم: تابع در این ناحیه یک‌به‌یک نیست زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



نمودار در ناحیه‌ی چهارم: تابع در این ناحیه یک‌به‌یک نیست زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

۱۰۰۱. گزینه‌ی ۱

از آن‌جایی که تابع f خطی و غیر یک به یک است، پس موازی محور xها بوده و شیب آن برابر صفر است. داریم:

$$f(x)=۴x+n-۲mx \Rightarrow f(x)=(۴-۲m)x+n$$

$$\xrightarrow{\text{ضریب } x=۰} ۴-۲m=۰ \Rightarrow m=۲$$

$$\Rightarrow f(x)=n \xrightarrow{(۳,-۵)\in f} n=-۵$$

$$\Rightarrow m^۲+n^۲=۲^۲+(-۵)^۲=۴+۲۵=۲۹$$

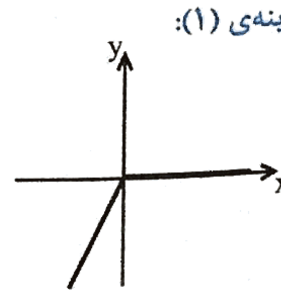
۱۰۰۲. گزینه‌ی ۳

نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱):

$$f(x)=x-|x|=\begin{cases} x-x & x\geq ۰ \\ x-(-x) & x<۰ \end{cases}$$

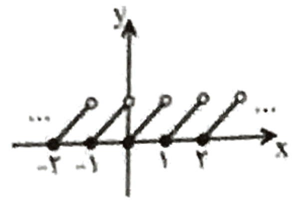
$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۰ & x\geq ۰ \\ ۲x & x<۰ \end{cases}$$



تابع f یک‌به‌یک نیست زیرا $y=۰$ نمودار تابع را در بیشمار نقطه قطع می‌کند.

گزینه‌ی (۲):

$$g(x)=x-[x]$$

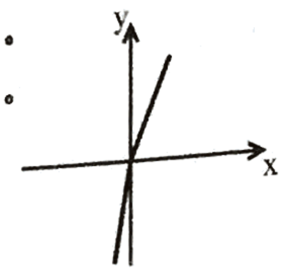


تابع g یک‌به‌یک نیست زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

گزینه‌ی (۳):

$$h(x)=۳x-|x|=\begin{cases} ۳x-x & x\geq ۰ \\ ۳x-(-x) & x<۰ \end{cases}$$

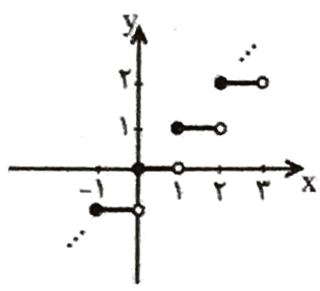
$$\Rightarrow h(x)=\begin{cases} ۲x & x\geq ۰ \\ ۴x & x<۰ \end{cases}$$



تابع h یک‌به‌یک است، زیرا هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

گزینه‌ی (۴):

$$m(x)=[x]$$



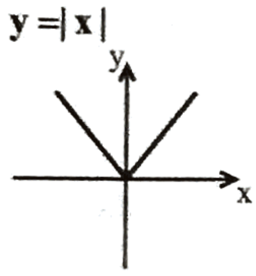
تابع m یک‌به‌یک نیست زیرا خطوط $y=k$ ، $k\in Z$ نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کنند.

۱۰۰۳. گزینه‌ی ۴

نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱):

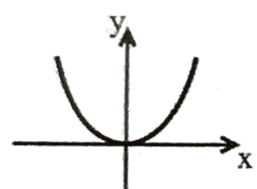
$$y=|x|$$



تابع $y=|x|$ یک‌به‌یک نیست زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار را در دو نقطه قطع کند.

گزینه‌ی (۲):

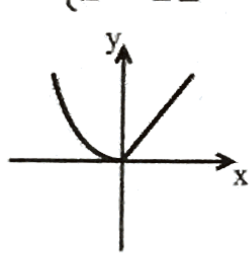
$$y=x^۲$$



تابع $y=x^۲$ یک‌به‌یک نیست زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار را در دو نقطه قطع کند.

گزینه‌ی (۳):

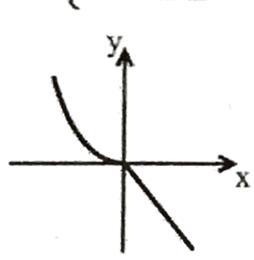
$$y=\begin{cases} x & x>۰ \\ x^۲ & x\leq ۰ \end{cases}$$



این تابع یک‌به‌یک نیست زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند.

گزینه‌ی (۴):

$$y=\begin{cases} -x & x>۰ \\ x^۲ & x\leq ۰ \end{cases}$$



این تابع یک‌به‌یک است زیرا هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند.

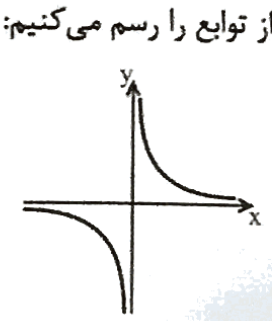
۱۰۰۴. گزینه‌ی ۴

ابتدا نمودار هر یک از توابع را رسم می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱):

$$f(x)=\frac{۱}{x}$$

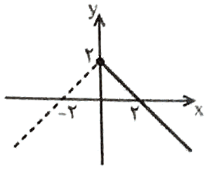
$$D_f=R-\{۰\}$$



گزینه‌ی (۲):

$f(x) = ۲ - |x|$

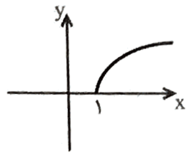
$D_f = [۰, +\infty)$



گزینه‌ی (۳):

$f(x) = \sqrt{x-۱}$

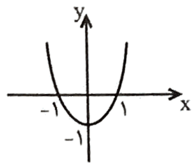
$D_f = [۱, +\infty)$



گزینه‌ی (۴):

$f(x) = x^۲ - ۱$

$D_f = R$



با توجه به نمودارها، تابع گزینه‌ی (۴) یک به یک نیست، زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

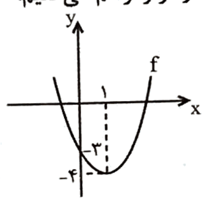
۱۰۰۵. گزینه‌ی ۲

ابتدا نمودار را رسم می‌کنیم:

$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳$

$\Rightarrow f(x) = (x^۲ - ۲x + ۱) - ۴$

$\Rightarrow f(x) = (x-۱)^۲ - ۴$



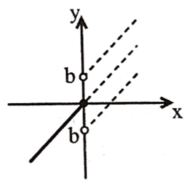
همانطور که در نمودار دیده می‌شود، $(۱, +\infty]$ و $[۱, -\infty)$ بزرگترین بازه‌هایی هستند که در آنها تابع یک‌به‌یک است. همچنین تابع در هر زیرمجموعه‌ای از هر یک از این دو بازه، یک‌به‌یک است.

۱۰۰۶. گزینه‌ی ۴

نمودار تابع به صورت زیر است:

$$y = \begin{cases} x & x \le ۰ \\ x + b & x > ۰ \end{cases}$$

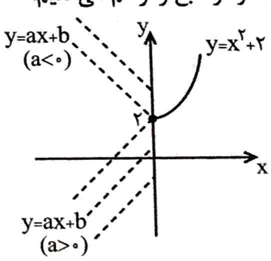
با توجه به نمودار، اگر $b \ge ۰$ باشد، آنگاه هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع خواهد کرد و تابع یک‌به‌یک خواهد بود.



۱۰۰۷. گزینه‌ی ۱

نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۲ & , \ x \ge ۰ \\ ax + b & , \ x < ۰ \end{cases}$$



برای اینکه تابع یک‌به‌یک باشد، باید شیب خط $y = ax + b$ مثبت باشد، بنابراین: $a > ۰$، از طرفی عرض از مبدأ خط باید کوچکتر یا مساوی ۲ باشد، بنابراین: $b \le ۲$.

۱۰۰۸. گزینه‌ی ۲

ابتدا محدوده‌ای را برای a محاسبه می‌کنیم که تابع در بازه‌ی داده شده یک‌به‌یک نباشد. سپس مجموعه جواب حاصل را از R کم می‌کنیم. می‌دانیم اگر ریشه‌ی عبارت داخل قدرمطلق در بازه‌ی $(-۲, ۱)$ قرار داشته باشد، تابع در آن بازه یک‌به‌یک نخواهد بود. پس:

ریشه‌ی عبارت داخل قدرمطلق: $\frac{x}{۲} + a = ۰ \Rightarrow x = -۲a$

$\Rightarrow -۲ < -۲a < ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} < a < ۱$

بنابراین: a حدود $= R - (-\frac{۱}{۲}, ۱)$

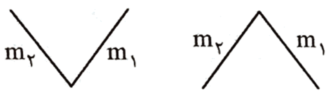
۱۰۰۹. گزینه‌ی ۴

طبق آزمون خط افقی در تابع یک به یک، هر خط موازی محور x ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. با تعیین علامت قدر مطلق تابع دوضابطه‌ای زیر حاصل می‌شود:

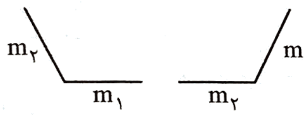
$$f(x) = \begin{cases} (a+۱)x & , \ x \ge ۰ \Rightarrow m_۱ = a + ۱ \\ (a-۱)x & , \ x < ۰ \Rightarrow m_۲ = a - ۱ \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی به‌دست آمده، در حالت‌های مختلف شیب‌ها، شکل‌های زیر به‌دست می‌آید:

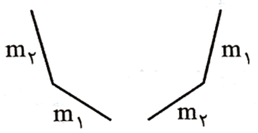
$m_۱.m_۲ < ۰$:



$m_۱.m_۲ = ۰$:



$m_۱.m_۲ > ۰$:



با توجه به شکل‌های رسم شده، تابع زمانی یک به یک است که $m_۱ m_۲ > ۰$، پس:

$(a+۱)(a-۱) > ۰ \Rightarrow a > ۱$ یا $a < -۱$

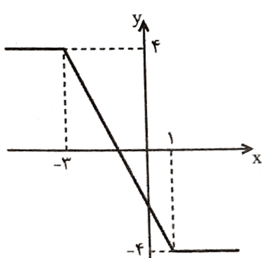
۱۰۱۰. گزینه‌ی ۲

از رسم نمودار تابع کمک می‌گیریم، با تعیین علامت قدرمطلق، تابع سه ضابطه‌ای زیر حاصل خواهد شد:

$$|x-۱| - |x+۳| = \begin{cases} -x+۱+x+۳ & , \ x \le -۳ \\ -x+۱-x-۳ & , \ -۳ < x < ۱ \\ x-۱-x-۳ & , \ x \ge ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} ۴ & , \ x \le -۳ \\ -۲x-۲ & , \ -۳ < x < ۱ \\ -۴ & , \ x \ge ۱ \end{cases}$$

پس نمودار تابع به‌صورت زیر است.



با توجه به نمودار، تابع در فاصله‌ی $[-۳, ۱]$ یک‌به‌یک است.

راهبرد حل تیپ (۲۰)

وارون تابع f را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و وارون هر تابع در نمایش‌های مختلف آن به صورت زیر است:

نمایش تابع	نحوه‌ی به دست آوردن وارون تابع
زوج مرتبی	عوض کردن جای مؤلفه‌های اول و دوم
پیکانی	عوض کردن جهت پیکان‌ها
نموداری	قرینه‌کردن نمودار نسبت به خط $y=x$

۱۰۱۱. گزینه‌ی ۱

$$f=\{(a,۱),(-۱,۰),(-۲,۲)\}$$
$$g=\{(۲,b),(۰,-۱),(۱,۲)\}$$

کافی است جای x و y را در زوج‌های مرتب رابطه‌ی f عوض کنیم تا وارون آن (g) به‌دست آید.

$$g=f^{-1}=\{(۱,a),(۰,-۱),(۲,-۲)\}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}(۱,a)=(۱,۲)\Rightarrow a=۲\\(۲,b)=(۲,-۲)\Rightarrow b=-۲\end{cases}\Rightarrow a+b=۰$$

۱۰۱۲. گزینه‌ی ۱

$$f=\{(a-b,۵),(۱,۳),(a+b,۵)\}$$

وارون آن را می‌یابیم:

$$\Rightarrow f^{-1}=\{(\underline{\underline{۵}},a-b),(۳,۱),(\underline{\underline{۵}},a+b)\}$$

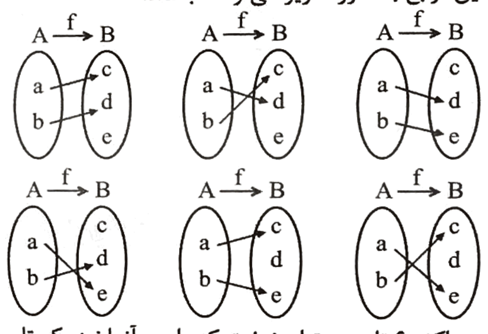
برای آن‌که f^{-1} یک تابع باشد، باید:

$$a-b=a+b\Rightarrow ۰=۲b\Rightarrow b=۰$$

۱۰۱۳. گزینه‌ی ۱

راه حل اول: اگر تابع f از A به B را با نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی وارون تابع f، خود یک تابع است که به هر عضو مجموعه‌ی دوم (B) حداکثر یک پیکان وارد شود.

بنابراین این توابع به صورت زیر می‌توانند باشند:



بنابراین حداکثر ۶ تابع می‌توان نوشت که وارون آنها نیز یک تابع است.

راه حل دوم: تعداد توابعی که از یک مجموعه‌ی n عضوی به یک مجموعه‌ی m عضوی می‌توان نوشت برابر با m^n است. پس تعداد کل توابع از مجموعه‌ی ۲ عضوی A به مجموعه‌ی ۳ عضوی B برابر با $۹=۳^۲$ است.

اگر هر دو عضو مجموعه‌ی A به یک عضو مجموعه‌ی B وارد شود آنگاه وارون آن تابع نخواهد بود، بنابراین از ۹ حالت، در ۳ حالت وارون، تابع نخواهد بود، پس حداکثر $۹-۳=۶$ تابع می‌توان نوشت.

راهبرد حل تیپ (۲۱)

تابع f وارون‌پذیر است، اگر و فقط اگر یک‌به‌یک باشد.

بنابراین با رسم نمودار یک تابع می‌توان با بررسی یک‌به‌یک بودن آن در مورد وارون‌پذیری آن نظر داد.

الف) توابع به شکل $y=ax+b$ ، $(a\neq ۰)$ ، $y=a(x+b)^۳$ ، $y=\sqrt{ax+b}$ توابعی یک‌به‌یک و وارون‌پذیرند.

ب) تابع $y=ax^۲+bx+c$ $(a\neq ۰)$ در هر یک از بازه‌های $(-\infty,\frac{-b}{۲a}]$ و $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ وارون‌پذیر است.

۱۰۱۴. گزینه‌ی ۴

اگر تابع یک‌به‌یک باشد، آنگاه وارون‌پذیر است. یک‌به‌یک بودن هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه‌ی (۱): یک‌به‌یک نیست، زیرا به ازای دو مقدار متمایز $x=-۱$ و $x=۳$ مقدار تابع برابر با ۲ می‌شود.

گزینه‌ی (۲): یک‌به‌یک نیست، زیرا به ازای دو مقدار متمایز $x=۱$ و $x=-۱$ مقدار تابع برابر با ۱ می‌شود.

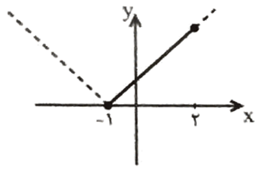
گزینه‌ی (۳): یک‌به‌یک نیست، زیرا به ازای دو مقدار متمایز $x=-۱$ و $x=۳$ مقدار تابع برابر با ۳ می‌شود.

گزینه‌ی (۴): یک‌به‌یک است، زیرا به ازای هر مقدار از دامنه، مقدار تابع متمایز است.

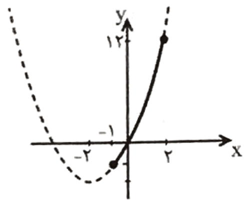
۱۰۱۵. گزینه‌ی ۳

نمودار هر یک از گزینه‌ها را در بازه‌ی $[-۱,۲]$ رسم می‌کنیم.

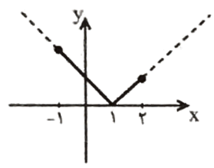
گزینه‌ی (۱) : $y=|x+۱|$



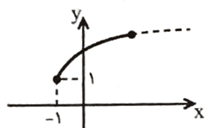
گزینه‌ی (۲) : $y=x^۲+۴x=(x+۲)^۲-۴$



گزینه‌ی (۳) : $y=|x-۱|$



گزینه‌ی (۴) : $y=۱+\sqrt{x+۱}$



فقط نمودار گزینه‌ی (۳) در بازه‌ی $[-۱,۲]$ یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون‌پذیر نیست.

راهبرد حل تیپ (۲۲)

① اگر نقطه‌ی $A(a,b)\in f$ آنگاه نقطه‌ی $A'(b,a)\in f^{-1}$ و داریم:

$$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

② اگر f^{-1} وارون تابع f باشد، آنگاه:

$$D_{f^{-1}}=R_f \text{ و } R_{f^{-1}}=D_f$$

۱۰۱۶. گزینه‌ی ۱

$$(۲,b+۱)\in f^{-1}\Rightarrow (b+۱,۲)\in f$$

با دقت در نمودار تابع f می‌بینیم که نقطه‌ی (۱,۲) بر روی نمودار تابع f قرار دارد یعنی $(۱,۲)\in f$، بنابراین:

$$(b+۱,۲)=(۱,۲)\Rightarrow b+۱=۱\Rightarrow b=۰$$

همچنین داریم: $(b,a)\in f^{-1}\Rightarrow (a,b)\in f\xrightarrow{b=۰}(a,۰)\in f$

با توجه به نمودار تابع f می‌بینیم که نقطه‌ی (۱,۰-) نیز متعلق به تابع f می‌باشد، بنابراین:

$$(-۱,۰)=(a,۰)\Rightarrow a=-۱\Rightarrow a+b=-۱+۰=-۱$$

۱۰۱۷. گزینه‌ی ۱

با قرار دادن اعضای مجموعه‌ی A به جای x، اعضای تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$f=\{(۱,۵),(۲,۳),(۳,۱),(۴,-۱)\}\Rightarrow f(۱)=۵$$

با تعویض مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب تابع f، f^{-1} را به‌دست می‌آوریم:

$$f^{-1}=\{(۵,۱),(۳,۲),(۱,۳),(-۱,۴)\}\Rightarrow f^{-1}(۳)=۲$$

بنابراین:

$$f^{-1}(۳)+f(۱)=۲+۵=۷$$

۱۰۱۸. **گزینه‌ی ۳**

اگر دو تابع f و f^{-1} وارون هم باشند، آنگاه:

$$(a\,,b)\in f \Leftrightarrow (b\,,a)\in f^{-1}$$

بنابراین کافی است جای x و y را در گزینه‌ها عوض کرده هر کدام متعلق به تابع f بود، جواب است. که فقط گزینه‌ی (۳) قابل قبول است.

$$(۰\,,۱)\in f \Rightarrow (۱\,,۰)\in f^{-1}$$

۱۰۱۹. **گزینه‌ی ۳**

اگر دو تابع f و f^{-1} وارون هم باشند، آنگاه:

$$(a\,,b)\in f \Leftrightarrow (b\,,a)\in f^{-1}$$

بنابراین:

$$f^{-1}(-۵)=۴ \Rightarrow f(۴)=-۵$$

$$f(۴)=۴^{۲}-۴A+۳=-۵ \Rightarrow A=۶$$

بنابراین $f(x)=x^{۲}-۶x+۳$، برای محاسبه‌ی $f^{-1}(-۲)$ خواهیم داشت:

$$f^{-1}(-۲)=a \Leftrightarrow -۲=f(a)$$

$$\Rightarrow -۲=a^{۲}-۶a+۳$$

$$\Rightarrow a^{۲}-۶a+۵=۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۵)=۰$$

$$\xrightarrow{x>۳} a=۵ \Rightarrow f^{-1}(-۲)=۵$$

۱۰۲۰. **گزینه‌ی ۳**

فرض می‌کنیم:

$$f^{-1}(۴)=a \Leftrightarrow f(a)=۴$$

بنابراین برای پیدا کردن a کافی است معادله‌ی زیر را حل کنیم.

$$f(a)=-a+\sqrt{-۲a}=۴ \Rightarrow \sqrt{-۲a}=۴+a \quad (\therefore)$$

طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$-۲a=۱۶+۸a+a^{۲}$$

$$\Rightarrow a^{۲}+۱۰a+۱۶=۰ \Rightarrow (a+۸)(a+۲)=۰$$

$$\Rightarrow a=-۸ \quad \text{یا} \quad a=-۲$$

به ازای $a=-۸$، دو طرف معادله‌ی $(\therefore)$ نابرابرند، پس $a=-۲$.

۱۰۲۱. **گزینه‌ی ۱**

با توجه به اینکه اگر $f^{-1}(\alpha)=\beta$ آنگاه $f(\beta)=\alpha$، خواهیم داشت:

$$f^{-1}(۲)=a \Rightarrow f(a)=۲$$

$$f^{-1}(-۲)=b \Rightarrow f(b)=-۲$$

اگر $a\le ۰$ باشد، از ضابطه‌ی بالایی تابع داریم:

$$f(a)=۲a-۱=۲ \Rightarrow ۲a=۳ \Rightarrow a=\frac{۳}{۲} \quad \text{غ‌ق‌ق}$$

اگر $a>۰$ باشد، از ضابطه‌ی پایینی تابع داریم:

$$f(a)=a-۱=۲ \Rightarrow a=۳$$

اگر $b\le ۰$ باشد، از ضابطه‌ی بالایی تابع داریم:

$$f(b)=۲b-۱=-۲ \Rightarrow ۲b=-۱ \Rightarrow b=-\frac{۱}{۲}$$

اگر $b>۰$ باشد، از ضابطه‌ی پایینی تابع داریم:

$$f(b)=b-۱=-۲ \Rightarrow b=-۱ \quad \text{غ‌ق‌ق}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(۲)+f^{-1}(-۲)=۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۱۰۲۲. **گزینه‌ی ۲**

اگر $f(-۲)=\alpha$، آنگاه $f^{-1}(\alpha)=-۲$. با توجه به اینکه $f^{-1}(۲x)=۵x+۳$ داریم:

$$f^{-1}(۲x)=۵x+۳=-۲ \Rightarrow x=-۱$$

بنابراین $f^{-1}(-۲)=-۲$؛ در نتیجه: $f(-۲)=-۲$.

۱۰۲۳. **گزینه‌ی ۲**

ابتدا با توجه به اینکه دامنه‌ی تابع بازه‌ی $(۲\,,۳)$ است، ضابطه‌ی تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲<x<۳ \Rightarrow [x]=۲ \\ ۲<x<۳ \Rightarrow -۳<-x<-۲ \Rightarrow [-x]=-۳ \end{cases}$$

$$f(x)=[-x]x+[x] \xrightarrow[{[-x]=-۳}]{[x]=۲} f(x)=-۳x+۲$$

اگر فرض کنیم $f^{-1}(-۵)=\alpha$، آنگاه $f(\alpha)=-۵$، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(\alpha)=-۵ \Rightarrow -۳\alpha+۲=-۵ \Rightarrow \alpha=\frac{۷}{۳}$$

$\alpha=\frac{۷}{۳}$ در دامنه‌ی $(۲\,,۳)$ قرار دارد، پس قابل قبول است.

۱۰۲۴. **گزینه‌ی ۲**

از آنجا که برد تابع وارون برابر با دامنه‌ی خود تابع است، کافی است دامنه‌ی تابع f را بیابیم.

$$f(x)=\sqrt{x+۵}$$

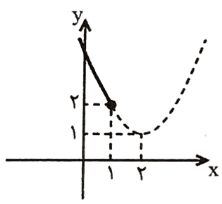
$$x+۵\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۵ \Rightarrow D_f=R_{f^{-1}}=[-۵\,,+\infty)$$

۱۰۲۵. **گزینه‌ی ۲**

دامنه‌ی تابع وارون، با برد تابع اصلی برابر است، پس برد تابع با ضابطه‌ی $y=x^{۲}-۴x+۵$ را با شرط $x\le ۱$ به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

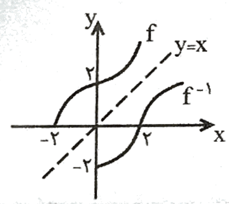
$$y=x^{۲}-۴x+۵=(x^{۲}-۴x+۴)+۱$$

$$\Rightarrow y=(x-۲)^{۲}+۱$$



همانطور که در شکل دیده می‌شود با شرط $x\le ۱$، برد تابع بازه‌ی $[۲\,,+\infty)$ است که همان دامنه‌ی تابع وارون است.

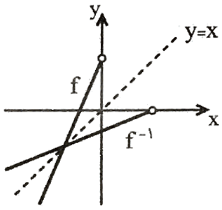
راهبرد حل تیپ (۲۳)



نمودار دو تابع f و f^{-1} نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قرینه‌اند. بنابراین برای رسم نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه‌ی نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.

۱۰۲۶. **گزینه‌ی ۳**

برای به‌دست آوردن نمودار وارون یک تابع، کافی است نمودار تابع را نسبت به خط $y=x$ قرینه کنیم.

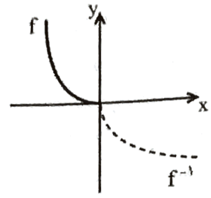


با توجه به اینکه خط $y=x$ با نمودار تابع برخورد دارد و طول و عرض نقطه‌ی برخورد یکسان است، همان نقطه روی وارون تابع نیز قرار دارد.

در نقطه‌ی $(۰\,,a)$ تابع f تعریف نشده است، پس وارون آن در نقطه‌ی $(a\,,۰)$ نیز تعریف نمی‌شود.

۱۰۲۷. گزینه‌ی ۴

راه حل اول: نمودار تابع f را به شکل فرضی زیر در نظر بگیرید. قرینه‌ی آن را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا وارون آن، f^{-1} به‌دست آید. همانطور که مشاهده می‌شود وارون آن در ناحیه‌ی چهارم قرار می‌گیرد.

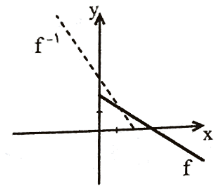


راه حل دوم: در ناحیه‌ی دوم طول نقاط منفی و عرض آنها مثبت است. با عوض کردن جای طول و عرض نقاط، وارون تابع به‌دست می‌آید؛ بنابراین طول نقاط وارون تابع (که همان عرض نقاط خود تابع‌اند) مثبت و عرض نقاط وارون تابع (که همان طول نقاط خود تابع‌اند) منفی خواهد بود که در این صورت، وارون تابع در ناحیه‌ی چهارم قرار خواهد گرفت.

ناحیه‌ی دوم: $\underset{\text{منفی}\ \ \text{مثبت}}{(\alpha\ ,\ \beta)} \xrightarrow{\text{وارون}} \underset{\text{مثبت}\ \ \text{منفی}}{(\beta\ ,\ \alpha)}$:ناحیه‌ی چهارم

۱۰۲۸. گزینه‌ی ۱

راه حل اول: نمودار تابع f را به‌صورت شکل زیر در نظر بگیرید که از نواحی اول و چهارم محورهای مختصات عبور می‌کند. قرینه‌ی آن را نسبت به خط $y=x$ رسم می‌کنیم تا وارون آن، f^{-1} به‌دست آید. همانطور که مشاهده می‌شود نمودار f^{-1} از نواحی اول و دوم می‌گذرد.



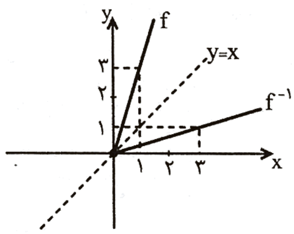
راه حل دوم: در ناحیه‌ی اول، طول و عرض نقاط مثبت و در ناحیه‌ی چهارم، طول نقاط مثبت و عرض نقاط منفی است. وارون تابع با جابه‌جا کردن طول و عرض نقاط به‌دست می‌آید؛ بنابراین وارون نقاطی که در ناحیه‌ی اول قرار دارند، در همان ناحیه می‌مانند و وارون نقاطی که در ناحیه‌ی چهارم قرار دارند، در ناحیه‌ی دوم قرار می‌گیرند.

ناحیه‌ی اول: $\underset{\text{مثبت}\ \ \text{مثبت}}{(\alpha\ ,\ \beta)} \xrightarrow{\text{وارون}} \underset{\text{مثبت}\ \ \text{مثبت}}{(\beta\ ,\ \alpha)}$:ناحیه‌ی اول

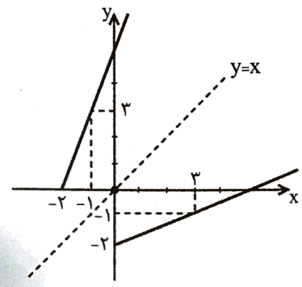
ناحیه‌ی چهارم: $\underset{\text{مثبت}\ \ \text{منفی}}{(\alpha\ ,\ \beta)} \xrightarrow{\text{وارون}} \underset{\text{منفی}\ \ \text{مثبت}}{(\beta\ ,\ \alpha)}$:ناحیه‌ی دوم

۱۰۲۹. گزینه‌ی ۱

نمودار تابع زیر و وارون آن را در نظر بگیرید.



حال نمودار را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم و وارون آن را رسم می‌کنیم.

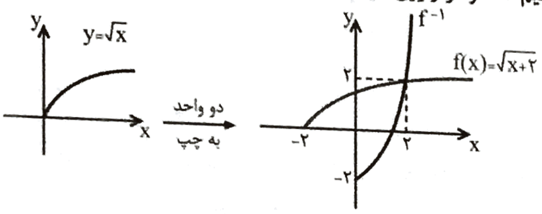


همانطور که در نمودار مشاهده می‌شود، نمودار f^{-1} دو واحد به پایین منتقل شده است.

توجه کنید که هر تغییری که روی محور xها در نمودار تابع f داده می‌شود، متناظر همان تغییر روی محور yها در نمودار تابع f^{-1} رخ می‌دهد.

۱۰۳۰. گزینه‌ی ۳

نمودار تابع را رسم کرده و نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قرینه می‌کنیم تا نمودار وارون آن به دست آید:



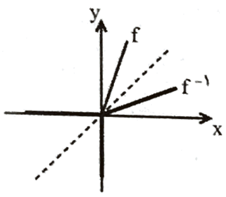
بنابراین نمودار f^{-1} از نواحی اول و چهارم می‌گذرد.

۱۰۳۱. گزینه‌ی ۴

با استفاده از تعریف قدرمطلق، تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2x=4x & ,\quad x\geq 0 \\ 2x+(-2x)=0 & ,\quad x<0 \end{cases}$$

کافی است نمودار فوق را رسم کرده و قرینه‌ی آن را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم رسم کنیم که گزینه‌ی (۴) به‌دست می‌آید.

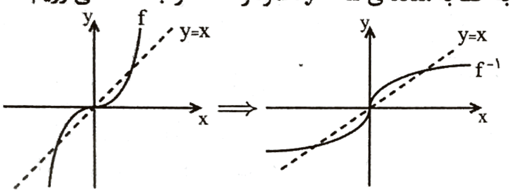


۱۰۳۲. گزینه‌ی ۳

با استفاده از تعریف قدرمطلق، ضابطه‌ی تابع را بدون نماد قدرمطلق می‌نویسیم:

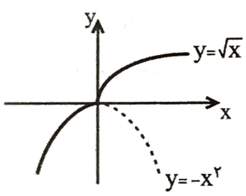
$$f(x)=x|x|=\begin{cases} x(x)=x^2 & ;\quad x\geq 0 \\ x(-x)=-x^2 & ;\quad x<0 \end{cases}$$

ابتدا با توجه به ضابطه‌های بالا، نمودار تابع f را رسم کرده و با قرینه کردن آن نسبت به خط به معادله‌ی $y=x$، نمودار f^{-1} را به‌دست می‌آوریم.

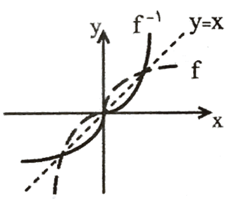


۱۰۳۳. گزینه‌ی ۳

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. برای این منظور ابتدا هر ضابطه را به طور کامل به صورت خط‌چین رسم کرده، پس از اعمال شرط ضابطه‌ها در قسمت‌های مطلوب، خط‌چین را به خط کامل تبدیل می‌کنیم.



حال با معلوم بودن نمودار تابع f، با قرینه‌کردن آن نسبت به خط $y=x$، نمودار f^{-1} به دست می‌آید.

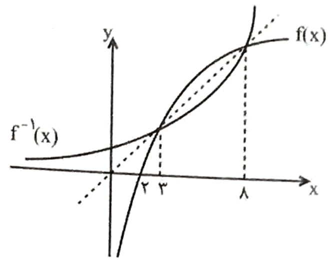


۱۰۳۴. گزینه‌ی ۴

برای پیدا کردن دامنه، باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر قرار دهیم.

$$x-f^{-1}(x)\geq 0 \Rightarrow x\geq f^{-1}(x)$$

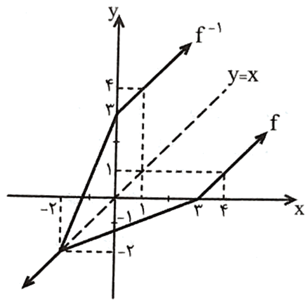
حال با توجه به شکل تابع f، نمودار f^{-1} را رسم می‌کنیم که قرینه‌ی نمودار f نسبت به خط $y=x$ است.



همانطور که در شکل دیده می‌شود در بازه‌ی $[3, 8]$ نمودار $y=x$ بالاتر یا مساوی منحنی $f^{-1}(x)$ است. پس دامنه‌ی تابع، بازه‌ی $[3, 8]$ است.

۱۰۳۵. گزینه‌ی ۴

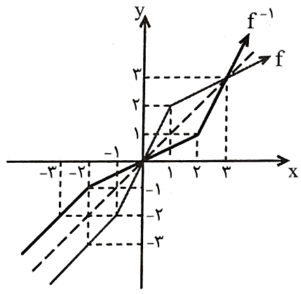
قرینه‌ی نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده تا نمودار تابع f^{-1} به دست آید.



همانطور که مشاهده می‌شود به ازای $x \le -2$ نمودار دو تابع f و f^{-1} بر هم منطبق‌اند، پس بی‌شمار نقطه‌ی مشترک دارند.

۱۰۳۶. گزینه‌ی ۲

به ازای نقاط تلاقی دو نمودار f و f^{-1}، تساوی $f^{-1}(x)=f(x)$ برقرار است. نمودار توابع f و f^{-1} را در یک دستگاه رسم کرده و نقاط تلاقی آنها را می‌یابیم.



همانطور که مشاهده می‌شود دو نمودار در دو نقطه‌ی $x=0$ و $x=3$ تلاقی دارند، بنابراین تساوی $f^{-1}(a)=f(a)$ به ازای $a=0$ و $a=3$ برقرار است.

۱۰۳۷. گزینه‌ی ۳

اگر ضابطه‌ی تابع خطی را به صورت $f(x)=mx+k$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(a)=b \Rightarrow ma+k=b \\ f(b)=a \Rightarrow mb+k=a \end{cases}$$

طرفین تساوی‌های بالا را از هم کم می‌کنیم:

$$ma-mb=b-a \Rightarrow ma+a-mb-b=0$$

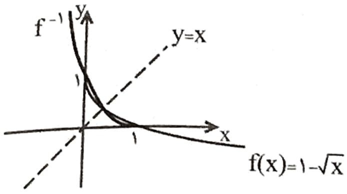
$$\Rightarrow a(m+1)-b(m+1)=0 \Rightarrow (m+1)(a-b)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \Rightarrow a=b \\ m+1=0 \Rightarrow m=-1 \end{cases}$$

طبق فرض $a \ne b$ است، پس فقط $m=-1$ قابل قبول است، بنابراین ضابطه‌ی تابع خطی به صورت $y=-x+k$ خواهد بود. طبق درس‌نامه، f و f^{-1} در این حالت بر هم منطبق‌اند و بی‌شمار نقطه‌ی تقاطع دارند.

۱۰۳۸. گزینه‌ی ۲

نمودار دو تابع f و f^{-1} را در یک دستگاه رسم می‌کنیم تا تعداد نقاط تلاقی آنها به دست آید. برای رسم نمودار f^{-1}، نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم.



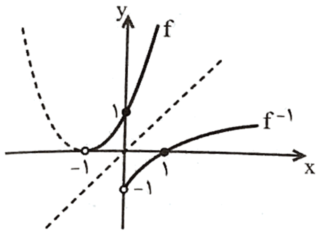
دو نمودار در دو نقطه‌ی $(0, 1)$ و $(1, 0)$ و یک نقطه روی خط $y=x$ متقاطع‌اند.

۱۰۳۹. گزینه‌ی ۴

ابتدا تابع را با کمک اتحاد مربع کامل ساده می‌کنیم.

$$f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2 ; x>-1$$

چون نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند پس با رسم نمودارهای f و f^{-1} در یک دستگاه مختصات، تعداد نقاط تلاقی آنها را می‌یابیم:

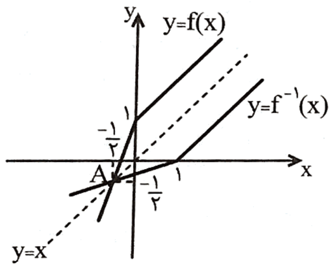


با توجه به شکل، نمودارهای f و f^{-1} تلاقی ندارند.

۱۰۴۰. گزینه‌ی ۱

تابع را به صورت دو ضابطه‌ای نوشته و سپس رسم می‌کنیم:

$$f(x)=2x-|x|+1=\begin{cases} x+1 & ; \; x\ge 0 \\ 3x+1 & ; \; x<0 \end{cases}$$



نمودار تابع f را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به‌دست آید. با توجه به شکل مشخص است که محل برخورد دو نمودار روی خط $y=x$ است و نقطه‌ای است که x آن منفی است، بنابراین:

$$x<0 : 3x+1=x \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \Rightarrow a+b=-\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=-1$$

راهبرد حل تیپ (۲۴)

برای یافتن ضابطه‌ی وارون تابع یک‌به‌یک $y=f(x)$، از معادله‌ی $y=f(x)$، x را برحسب y یافته، جای x و y را عوض کرده و با یافتن برد تابع f، دامنه‌ی تابع f^{-1} را در کنار آن می‌نویسیم.

مثال: ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}-1$ را بیابید.

حل:

$$y=\sqrt{x}-1 \rightarrow y+1=\sqrt{x} \Rightarrow x=(y+1)^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(x+1)^2$$

از طرفی $\sqrt{x}\ge 0$ پس $y=\sqrt{x}-1\ge -1$، پس:

$$D_{f^{-1}}=R_f=[-1, +\infty)$$

بنابراین: $f^{-1}(x)=(x+1)^2$ ، $x\ge -1$.

۱۰۴۱. گزینه‌ی ۴

در معادله‌ی $y=f(x)$ ، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم و سپس با تبدیل y به x و x به y، $f^{-1}(x)$ را می‌یابیم:

$$y=\frac{x}{۳}-۲\Rightarrow y+۲=\frac{x}{۳}\Rightarrow x=۳y+۶$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=y=۳x+۶$$

$$\xrightarrow{y=ax+b} a=۳\ ,\ b=۶\Rightarrow a+b=۹$$

۱۰۴۲. گزینه‌ی ۲

ابتدا ضابطه‌ی وارون تابع f را می‌یابیم:

$$y=۲x-۳\Rightarrow x=\frac{y+۳}{۲}\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y=\frac{x+۳}{۲}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=g(x)=\frac{x+۳}{۲}\xrightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدأ}} g(۰)=\frac{۰+۳}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۱۰۴۳. گزینه‌ی ۲

$$(۲\ ,۶)\in f^{-1}\Rightarrow (۶\ ,۲)\in f\Rightarrow f(۶)=۲$$

$$f(x)=\frac{۲}{۳}x+a\xrightarrow{f(۶)=۲} ۲=\frac{۲}{۳}(۶)+a$$

$$\Rightarrow ۲=۴+a\Rightarrow a=-۲$$

ضابطه‌ی تابع f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{۲}{۳}x-۲\Rightarrow \frac{۲}{۳}x=y+۲\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}(y+۲)$$

$$\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}y+۳\xrightarrow{\text{عوض کردن جای } y,x} y=\frac{۳}{۲}x+۳$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۳}{۲}x+۳\Rightarrow f^{-1}(۰)=۳$$

۱۰۴۴. گزینه‌ی ۳

$$f^{-1}(۰)=۵\ ,\ f(۲)=۳\Rightarrow f^{-1}(۳)=۲$$

برای به دست آوردن f^{-1}، تابع خطی گذرنده از نقاط $(۳\ ,۲)$ و $(۰\ ,۵)$ را می‌یابیم:

$$f^{-1}: y-۵=\frac{۵-۲}{۰-۳}(x-۰)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=-x+۵\xrightarrow{x=۶} f^{-1}(۶)=-۱$$

۱۰۴۵. گزینه‌ی ۲

با فرض $y=f(x)$، x را برحسب y نوشته و وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=mx+h\Rightarrow y-h=mx\Rightarrow x=\frac{y-h}{m}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-h}{m}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۱}{m}x-\frac{h}{m}$$

از طرفی $f^{-1}(x)=m'x+h'$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} f^{-1}(x)=\frac{۱}{m}x-\frac{h}{m} \\ f^{-1}(x)=m'x+h' \end{cases}\Rightarrow \frac{۱}{m}=m'\Rightarrow mm'=۱$$

۱۰۴۶. گزینه‌ی ۲

دو تابع $ax+by=۸$ و $۲x-۳y=b$ نسبت به خط $y=x$ متقارن هستند بنابراین وارون یکدیگرند. در نتیجه اگر در یکی از این توابع x را به y و y را به x تبدیل کنیم باید با دیگری مساوی و منطبق بر آن باشد.

$$\begin{cases} ax+by=۸ \quad (۱) \\ ۲x-۳y=b\xrightarrow[\text{خط } y=x]{\text{قرینه نسبت به}} ۲y-۳x=b \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۳x+۲y=b \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)\ ,(۱)} \frac{a}{-۳}=\frac{b}{۲}=\frac{۸}{b}\Rightarrow b^۲=۱۶$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b=۴\Rightarrow \frac{a}{-۳}=۲\Rightarrow a=-۶\Rightarrow a+b=-۲ \\ b=-۴\Rightarrow \frac{a}{-۳}=-۲\Rightarrow a=۶\Rightarrow a+b=۲ \end{cases}$$

۱۰۴۷. گزینه‌ی ۴

f و f^{-1} وارون یکدیگرند، بنابراین برای به دست آوردن f، وارون f^{-1} را می‌یابیم:

$$f^{-1}(x)=۲x-۱$$

$$y=۲x-۱\Rightarrow \frac{y+۱}{۲}=x\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y=\frac{x+۱}{۲}$$

بنابراین تابع f برابر است با: $f(x)=\frac{x+۱}{۲}$

حال ضابطه‌ی تابع $y=۱-۳f(x-۱)$ را می‌یابیم:

$$y=۱-۳f(x-۱)=۱-۳(\frac{x-۱+۱}{۲})=۱-\frac{۳x}{۲}$$

به ازای $y=۰$، محل تقاطع نمودار تابع با محور xها به دست می‌آید:

$$y=۰\Rightarrow ۱-\frac{۳x}{۲}=۰\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

۱۰۴۸. گزینه‌ی ۴

وارون تابع $f(x)=ax+b$ را می‌یابیم:

$$y=ax+b\Rightarrow y-b=ax\Rightarrow \frac{y-b}{a}=x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}$$

$$f(x)=f^{-1}(x)\Rightarrow ax+b=\frac{۱}{a}x-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{۱}{a}\Rightarrow a^۲=۱\xrightarrow{a<۰} a=-۱ \\ b=\frac{-b}{a}\xrightarrow{a=-۱} b=\frac{-b}{(-۱)}\Rightarrow b=b \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر مقدار دلخواه b تساوی برقرار است.

۱۰۴۹. گزینه‌ی ۱

ابتدا دامنه‌ی تابع f^{-1} که برابر با برد تابع f است را می‌یابیم:

$$f(x)=-\sqrt{x+۳}$$

$$x+۳\ge ۰\Rightarrow \sqrt{x+۳}\ge ۰\Rightarrow -\sqrt{x+۳}\le ۰$$

$$\Rightarrow R_f=D_{f^{-1}}=(-\infty\ ,۰]$$

برای به دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون، x را برحسب y نوشته، سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=-\sqrt{x+۳}\Rightarrow \sqrt{x+۳}=-y\Rightarrow x+۳=(-y)^۲$$

$$\Rightarrow x=y^۲-۳\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y=x^۲-۳\ ،\ x\le ۰$$

۱۰۵۰. گزینه‌ی ۴

برای یافتن وارون تابع، x را برحسب y نوشته، سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{۴}x^۲+۳\Rightarrow x^۲=۴(y-۳)\Rightarrow x=\pm ۲\sqrt{y-۳}$$

$$\xrightarrow{x<۰} x=-۲\sqrt{y-۳}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} f^{-۱}(x)=-۲\sqrt{x-۳}$$

بنابراین $a=-۲$ و $b=-۳$، در نتیجه: $a+b=-۵$.

۱۰۵۱. گزینه‌ی ۱

راه حل اول: ابتدا ضابطه‌ی تابع را طوری می‌نویسیم که یک عبارت مربع کامل در آن ظاهر شود:

$$y=x^۲-۶x=(x^۲-۶x+۹)-۹=(x-۳)^۲-۹$$

حال با توجه به دامنه‌ی تابع، برد آن را می‌یابیم که دامنه‌ی تابع وارون است.

$$x>۴ \Rightarrow x-۳>۱ \Rightarrow (x-۳)^۲>۱^۲$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲-۹>-۸ \Rightarrow y>-۸$$

$\Rightarrow$ دامنه‌ی تابع وارون : $(-۸,+\infty)$

حال x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$y=(x-۳)^۲-۹ \Rightarrow y+۹=(x-۳)^۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+۹}=\sqrt{(x-۳)^۲} \Rightarrow \sqrt{y+۹}=|x-۳|$$

از آنجا که دامنه‌ی تابع $x>۴$ است، پس $x-۳>۱$، یعنی با شرط $x>۴$، عبارت $x-۳$ مثبت است و بنابراین قدر مطلقش با خودش برابر است، پس:

$$\sqrt{y+۹}=x-۳ \Rightarrow x=۳+\sqrt{y+۹}$$

با عوض کردن جای x و y، ضابطه‌ی تابع وارون به دست می‌آید:

$$y=۳+\sqrt{x+۹}\,;\, x>-۸$$

راه حل دوم:

$$y=x^۲-۶x;\, x>۴ \xrightarrow{x=۵} y=۵^۲-۳۰=-۵$$

از آنجا که $(۵,-۵)\in f$، پس $(-۵,۵)\in f^{-۱}$، در نتیجه گزینه‌های (۲) و (۴) رد می‌شوند زیرا عدد (-۵) در شرط $x>۴$ قرار ندارد. از بین گزینه‌های (۱) و (۳) گزینه‌ای درست است که با جایگذاری $x=-۵$ در آن، حاصل ۵ شود که گزینه‌ی (۱) اینگونه است.

۱۰۵۲. گزینه‌ی ۱

$$y=۲-\sqrt{x-۱}$$

دامنه‌ی این تابع $x\geq ۱$ است، با توجه به دامنه، برد آن را بدست می‌آوریم:

$$x\geq ۱ \Rightarrow x-۱\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۱}\geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{x-۱}\leq ۰$$

$\Rightarrow ۲-\sqrt{x-۱}\leq ۲ \Rightarrow$ برد تابع : $y\leq ۲$

$\Rightarrow$ دامنه‌ی وارون تابع : $x\leq ۲$

(دامنه‌ی وارون یک تابع، با برد آن تابع برابر است.)

برای یافتن ضابطه‌ی وارون تابع داریم:

$$y=۲-\sqrt{x-۱} \Rightarrow \sqrt{x-۱}=۲-y \Rightarrow x-۱=(۲-y)^۲$$

$$\Rightarrow x=۵-۴y+y^۲ \xrightarrow[y\to x]{x\to y} y=x^۲-۴x+۵$$

$\Rightarrow$ وارون تابع مفروض سؤال : $y=x^۲-۴x+۵\,;\, x\leq ۲$

۱۰۵۳. گزینه‌ی ۴

از آنجایی که $|-u|=|u|$، پس:

$$f(x)=۲x-|۲x-۴|$$

تابع را ضابطه‌بندی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-(۲x-۴)=۴ & , \quad x\geq ۲ \\ ۲x+۲x-۴=۴x-۴ & , \quad x\leq ۲ \end{cases}$$

تابع فقط در بازه‌ی $(-\infty,۲]$ وارون‌پذیر است، لذا:

$$y=۴x-۴ \Rightarrow y+۴=۴x \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}y+۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱$$

تابع f خطی است، پس برد آن برابر است با:

$$x\leq ۲ \Rightarrow ۴x\leq ۸ \Rightarrow ۴x-۴\leq ۴ \Rightarrow f(x)\leq ۴$$

بنابراین دامنه‌ی تابع $f^{-۱}$ بازه‌ی $(-\infty,۴]$ است، لذا:

$$f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱\,,\, x\leq ۴$$

۱۰۵۴. گزینه‌ی ۳

ضابطه‌ی تابع وارون را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{۲x+۲}{ax+b} \Rightarrow axy+by=۲x+۲$$

$$\Rightarrow axy-۲x=۲-by$$

$$x(ay-۲)=۲-by \Rightarrow x=\frac{۲-by}{ay-۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲-bx}{ax-۲}$$

$$f^{-۱}(x)=f(x) \Rightarrow b=-۲$$

۱۰۵۵. گزینه‌ی ۱

راه حل اول: نقطه‌ی $(۱,۱)\in f$ است، بنابراین $(۱,۱)\in f^{-۱}$. تنها گزینه‌ای که این نقطه در آن صدق می‌کند، گزینه‌ی «۱» است.

راه حل دوم: برای ضابطه‌ی بالایی تابع، داریم:

$$y=\sqrt{x}\,;\, x\geq ۰ \Rightarrow y\geq ۰$$

$$y^۲=x \xrightarrow{\text{تابع وارون}} y=x^۲\,;\, x\geq ۰$$

برای ضابطه‌ی پایینی تابع داریم:

$$y=-\sqrt{-x}\,;\, x<۰ \Rightarrow y<۰$$

$$y^۲=-x \Rightarrow x=-y^۲ \xrightarrow{\text{تابع وارون}} y=-x^۲\,;\, x<۰$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع وارون به صورت $y=\begin{cases} x^۲ & ; \quad x\geq ۰ \\ -x^۲ & ; \quad x<۰ \end{cases}$ و یا به طور خلاصه $y=x|x|\,;\, x\in R$ است.

۱۰۵۶. گزینه‌ی ۲

دو نقطه از تابع f انتخاب می‌کنیم. با عوض کردن جای مؤلفه‌های اول و دوم آنها، باید در معادله‌ی تابع وارون f یعنی تابع g صدق کنند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x=۱ \xrightarrow{\text{ضابطه‌ی بالایی}} y=۳(۱)=۳ \Rightarrow (۱,۳)\in f \\ \qquad \Rightarrow (۳,۱)\in f^{-۱} \\ x=-۱ \xrightarrow{\text{ضابطه‌ی پایینی}} y=۵(-۱)=-۵ \Rightarrow (-۱,-۵)\in f \\ \qquad \Rightarrow (-۵,-۱)\in f^{-۱} \end{cases}$$

$$g(x)=f^{-۱}(x)=ax+b|x|$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{(۳,۱)\in f^{-۱}} ۳a+۳b=۱ \quad (*) \quad \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} -۲a+۸b=۰ \\ \xrightarrow{(-۵,-۱)\in f^{-۱}} -۵a+۵b=-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow b=\frac{a}{۴} \xrightarrow{(*)} ۳a+\frac{۳}{۴}a=۱ \Rightarrow \frac{۱۵}{۴}a=۱ \Rightarrow a=\frac{۴}{۱۵}$$

۱۰۵۷. گزینه‌ی ۳

دامنه‌ی تابع f، بازه‌ی $D_f=R$ است، برد تابع را می‌یابیم:

$$\Rightarrow \sqrt{x^۲+۱}>\sqrt{x^۲} \Rightarrow \sqrt{x^۲+۱}>|x|\geq -x$$

$$\sqrt{x^۲+۱}>-x \Rightarrow x+\sqrt{x^۲+۱}>۰ \Rightarrow f(x)>۰$$

لذا برد تابع، بازه‌ی $R_f=(0,+\infty)$ است ، پس دامنـه‌ی تـابع f^{-1}، $x>0$ است.

$$y=x+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow (y-x)^2=x^2+1$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-2xy=x^2+1$$
$$\Rightarrow x=\frac{y^2-1}{2y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\ ,\ x>0$$

۱۰۵۸. گزینه‌ی ۳

می‌دانیم اگر مختصات نقطه‌ی (α,β) در معادله‌ی یک تابع صدق کند، مختصات نقطه‌ی (β,α) در معادله‌ی وارون آن صدق می‌کند.

مختصات نقطه‌ی $(1,0)$ در معادله‌ی تابع $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$ صدق می‌کند، پس مختصات نقطه‌ی $(0,1)$ باید در معادلـه‌ی وارون آن نیـز صـدق کنـد، بـا توجـه بـه ایـن مطلـب، ایـن نقطـه در گزینـه‌ی (۳) صدق می‌کند.

۱۰۵۹. گزینه‌ی ۱

می‌دانیم اگر مختصات نقطه‌ی (α,β) در معادله‌ی یک تابع صدق کند، مختصات نقطه‌ی (β,α) در معادله‌ی وارون آن صدق می‌کند.

مختصات نقطه‌ی $(0,0)$ در معادله‌ی تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ صدق می‌کند، پس مختصات نقطه‌ی $(0,0)$ باید در معادله‌ی وارون آن نیز صدق کند، بـا توجـه بـه ایـن مطلـب، تنهـا در گزینـه‌ی «۱» ایـن نقطـه صدق می‌کند.

۱۰۶۰. گزینه‌ی ۴

وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=x^2+2x+4\Rightarrow y=(x+1)^2+3\Rightarrow (x+1)^2=y-3$$
$$\Rightarrow |x+1|=\sqrt{y-3}\xrightarrow{x\le -1}-x-1=\sqrt{y-3}$$
$$\Rightarrow x=-\sqrt{y-3}-1\xrightarrow{\text{تعویض جای } x\ ,\ y}y=-\sqrt{x-3}-1$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x-3}-1$$

اکنون معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$$f^{-1}(x)=x+2\Rightarrow -\sqrt{x-3}-1=x+2$$
$$\Rightarrow -\sqrt{x-3}=x+3\xrightarrow{\text{به توان } 2}x-3=x^2+6x+9$$
$$\Rightarrow x^2+5x+12=0\xrightarrow{\Delta<0}\text{ریشه‌ی حقیقی ندارد.}$$

راهبرد حل تیپ (۲۵)

در اعمال بر روی توابع، ابتدا باید دامنه‌ی آن را مشخص کنیم.

در جمع، تفریق و ضرب دو تابع، دامنه‌ی تـابع حاصـل، برابـر اسـت بـا اشتراک دامنه‌ی دو تابع.

در عمل تقسیم دو تابع، باید توجه کرد که صفرهای تابعی که در مخـرج ار می‌گیرد باید از اشتراک دامنه‌ی دو تابع حذف شود.

: توجه کنید کـه تـابع $\frac{1}{f}$ بـا f^{-1} متفـاوت اسـت. f^{-1} وارون است و $\frac{1}{f}$ از تقسیم تابع ثابت $y=1$ بر تابع f به دست می‌آید.

۱۰۶۱. گزینه‌ی ۲

$$f(x)=\sqrt{x+1}\ ,\ g(x)=\frac{x+1}{x-2}$$
$$(2f-g)(3)=2f(3)-g(3)=2\sqrt{3+1}-\frac{3+1}{3-2}=4-4=0$$

۱۰۶۲. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=\sqrt{-2x+6}$$
$$D_f:-2x+6\ge 0\Rightarrow x\le 3\xrightarrow{D_f=(-\infty,a]}a=3$$
$$(f-g)(a)=(f-g)(3)=f(3)-g(3)=0-|6-3|=-3$$

۱۰۶۳. گزینه‌ی ۱

برای محاسبه‌ی $f(3)$ از ضابطه‌ی بالایی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{(2f-g)(3)}{(f+2g)(-1)}=\frac{2f(3)-g(3)}{f(-1)+2g(-1)}$$
$$=\frac{2(1-2\times 3)-(3-3)}{(-1)^2+2(-1-3)}=\frac{2\times(-5)-0}{1+2\times(-4)}=\frac{-10}{-7}=\frac{10}{7}$$

۱۰۶۴. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=x^2(2-x)^2$$

مقدار $f(1+x)$ را با تبدیل x به $1+x$ و مقدار $f(1-x)$ را با تبدیل x به $1-x$ می‌یابیم:

$$f(1+x)=(1+x)^2(2-1-x)^2=(1+x)^2(1-x)^2$$
$$f(1-x)=(1-x)^2(2-1+x)^2=(1-x)^2(1+x)^2$$
$$\Rightarrow f(1+x)-f(1-x)=0$$

۱۰۶۵. گزینه‌ی ۳

می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد، آنگاه $f^{-1}(b)=a$ و برعکس، پس داریم:

$$f^{-1}(5)=-2\Rightarrow f(-2)=5$$

اگر ضابطه‌ی تابع خطی f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases}f(3)=0\Rightarrow 0=3a+b\\ f(-2)=5\Rightarrow 5=-2a+b\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}3a+b=0\\ -2a+b=5\end{cases}\Rightarrow a=-1\ ,\ b=3$$
$$\Rightarrow f(x)=-x+3$$

حال با فرض $y=f(x)$، ضابطه‌ی f^{-1} را می‌یابیم:

$$y=-x+3\Rightarrow x=3-y$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=3-x=-x+3$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)+f(x)=(-x+3)+(-x+3)=-2x+6$$

۱۰۶۶. گزینه‌ی ۴

$$\begin{cases}f(x)+g(x)=3x+1 & (1)\\ f(x)-g(x)=2-x & (2)\end{cases}$$

یک بار طرفین رابطه را با هم جمع و یک بـار از هـم کـم مـی‌کنـیم تـا توابع f و g را به دست آوریم:

$$\begin{cases}\xrightarrow{(1)+(2)}2f(x)=2x+3\Rightarrow f(x)=x+\frac{3}{2}\\ \xrightarrow{(1)-(2)}2g(x)=4x-1\Rightarrow g(x)=2x-\frac{1}{2}\end{cases}$$

بنابراین:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(6)=\frac{f(6)}{g(6)}=\frac{6+\frac{3}{2}}{12-\frac{1}{2}}=\frac{15}{23}$$

۱۰۶۷. گزینه‌ی ۳

ابتدا $f(x)$ را می‌یابیم، با قرار دادن $x=2$ داریم:

$$f(x)=2x^2+x+8-f(2)\xrightarrow{x=2}f(2)=8+2+8-f(2)$$

$$\Rightarrow 2f(2)=18\Rightarrow f(2)=9\Rightarrow f(x)=2x^2+x-1$$

$$(f-g)(x)=2\Rightarrow f(x)-g(x)=2$$

$$\Rightarrow g(x)=f(x)-2=2x^2+x-3$$

وقتی تابع g پایین محور x هاست، باید $g(x)<0$ باشد، پس:

$$2x^2+x-3<0\Rightarrow (x-1)(2x+3)<0$$

و مجموعه جواب بین دو ریشه یعنی $-1/5<x<1$ یا بازه‌ی $(-1/5,1)$ است.

۱۰۶۸. گزینه‌ی ۲

صفرهای تابع درجه‌ی دوم ۱ و ۴ هستند، پس معادله‌ی آن به‌صورت زیر است:

$$f(x)=a(x-1)(x-4)$$

عرض از مبدأ تابع f، ۱۲ است پس $f(0)=12$ و از آن‌جا:

$$f(x)=a(x-1)(x-4)$$

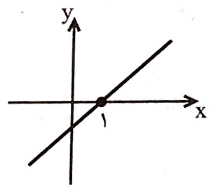
$$\xrightarrow{f(0)=12}12=a(0-1)(0-4)\Rightarrow a=3$$

بنابراین $f(x)=3(x-1)(x-4)$، از طرفی:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{3(x-1)(x-4)}{g(x)}=3(x-4)$$

$$\Rightarrow g(x)=x-1$$

با توجه به شکل روبه‌رو، نمودار تابع خطی g از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.



۱۰۶۹. گزینه‌ی ۲

$$f(x)=x^2-1$$

$$(2f-3g)(x)=2x^2-6x+1$$

ضابطه‌ی تابع f را در رابطه‌ی بالا جایگزین کرده و ضابطه‌ی تابع g را می‌یابیم:

$$2(x^2-1)-3g(x)=2x^2-6x+1$$

$$\Rightarrow -3g(x)=2x^2-6x+1-2x^2+2$$

$$\Rightarrow -3g(x)=-6x+3\Rightarrow g(x)=2x-1$$

طول از مبدأ تابع به ازای $y=0$ به دست می‌آید، لذا:

$$g(a)=0\Rightarrow g(a)=2a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۱۰۷۰. گزینه‌ی ۴

طبق فرض توابع f و g دو تابع خطی غیر ثابت‌اند و از آنجا که تابع $\frac{f}{g}$ یک به یک است، پس f و g دو تابع خطی متمایزند و همچنین ضریبی از یکدیگر نیستند، زیرا در این صورت $\frac{f}{g}$ برابر با تابع ثابت می‌شود که یک به یک نخواهد بود.

از آنجا که f و g دو تابع خطی غیر ثابت و متمایزند و ضریبی از یکدیگر نیز نیستند، بنابراین $\frac{g}{f}$ نیز یک‌به‌یک است.

مجموع و تفاضل دو تابع خطی غیر ثابت و متمایز، یک تابع خطی است که اگر مقدار ثابتی نباشد، یک به یک خواهد بود.

ولی ضرب دو تابع خطی غیر ثابت، همواره یک تابع درجه‌ی دوم خواهد بود که قطعاً یک به یک نیست.

۱۰۷۱. گزینه‌ی ۳

دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{3x+4}{4x+3}$، $R-\{-\frac{3}{4}\}$ است، داریم:

$$f(\frac{1}{x})=\frac{3(\frac{1}{x})+4}{4(\frac{1}{x})+3}=\frac{\frac{3+4x}{x}}{\frac{4+3x}{x}}=\frac{x(3+4x)}{x(4+3x)}$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{x})=\frac{3+4x}{4+3x}\quad,\quad D_{f(\frac{1}{x})}=R-\{0,-\frac{4}{3}\}$$

$$g(x)=f(x).f(\frac{1}{x})=\frac{3x+4}{4x+3}\times\frac{3+4x}{4+3x}=1$$

و دامنه‌ی آن اشتراک دامنه‌ی دو تابع است:

$$D_g=R-\{0,-\frac{3}{4},-\frac{4}{3}\}$$

پس $g(x)=1\ ,\ x\neq 0,-\frac{3}{4},-\frac{4}{3}$ و تابع g در سه نقطه از اعداد حقیقی تعریف نمی‌شود.

۱۰۷۲. گزینه‌ی ۳

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)}{g(x)}$$

$$D_h=(D_f\cap D_g)-\{x\,|\,g(x)=0\}$$

پس ابتدا دامنه‌ی توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{3-x}$$

$$3-x\geq 0\Rightarrow x\leq 3\Rightarrow D_f=(-\infty,3]$$

$$g(x)=\sqrt{x-1}$$

$$x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1\Rightarrow D_g=[1,+\infty)$$

$$\Rightarrow D_f\cap D_g=[1,3]$$

$$g(x)\neq 0\Rightarrow \sqrt{x-1}\neq 0\Rightarrow x\neq 1$$

بنابراین دامنه‌ی تابع h برابر است با:

$$D_h=[1,3]-\{1\}=(1,3]$$

که این بازه شامل دو عدد صحیح ۲ و ۳ است.

۱۰۷۳. گزینه‌ی ۴

$$D_{(\frac{1}{f}+\frac{1}{g})}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,f(x)=0 \text{ یا } g(x)=0\}$$

$$\left.\begin{array}{l}D_f:x-3>0\Rightarrow x>3\\ D_g:x\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow D_f\cap D_g=(3,+\infty)$$

$$f(x)=0\Rightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x-3}}=0\Rightarrow x=\pm 1$$

$$g(x)=0\Rightarrow \frac{x^2+5}{x}=0\Rightarrow x^2+5=0$$

$\Rightarrow x^2=-5$ غ ق ق

تابع g هیچ‌گاه برابر صفر نمی‌شود.

$$\Rightarrow D_{(\frac{1}{f}+\frac{1}{g})}=(3,+\infty)-\{x:x=\pm 1\}$$

$$D_{(\frac{1}{f}+\frac{1}{g})}=(3,+\infty)-\{\pm 1\}=(3,+\infty)$$

۱۰۷۴. گزینه‌ی ۲

تابع $f(x)=\sqrt{x-|x|}+\sqrt{\frac{۲-|x|}{x}}$، مجموع دو تابع $y_۱=\sqrt{x-|x|}$ و $y_۲=\sqrt{\frac{۲-|x|}{x}}$ است، بنابراین: $D_f=D_{y_۱}\cap D_{y_۲}$

پس ابتدا دامنه‌ی توابع $y_۱$ و $y_۲$ را می‌یابیم: $y_۱=\sqrt{x-|x|}$

$$x-|x|\geq ۰\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x\geq ۰}x-x\geq ۰\Rightarrow ۰\geq ۰ & ✓\\ \xrightarrow{x<۰}x-(-x)\geq ۰\Rightarrow ۲x\geq ۰ & ✗\end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{y_۱}=[۰,+\infty)$$

$$y_۲=\sqrt{\frac{۲-|x|}{x}}$$

$$\frac{۲-|x|}{x}\geq ۰$$

$$\begin{cases}\xrightarrow{x>۰}\frac{۲-x}{x}\geq ۰\xrightarrow{\text{مخرج مثبت است}}۲-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۲\\ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط } x>۰}۰<x\leq ۲\\ \xrightarrow{x<۰}\frac{۲-(-x)}{x}\geq ۰\xrightarrow{\text{مخرج منفی است}}۲+x\leq ۰\Rightarrow x\leq -۲\\ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط } x<۰}x\leq -۲\end{cases}$$

بنابراین دامنه‌ی تابع $y_۲$ برابر است با:

$$D_{y_۲}=(-\infty,-۲]\cup(۰,۲]$$

پس دامنه‌ی تابع f برابر است با: $D_f=D_{y_۱}\cap D_{y_۲}=(۰,۲]$

که شامل دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

۱۰۷۵. گزینه‌ی ۲

تابع $f(x)=\sqrt{[x]-x}-\sqrt{[-x]}$ حاصل تفریق دو تابع $y_۱=\sqrt{[x]-x}$ و $y_۲=\sqrt{[-x]}$ است، بنابراین:

$$D_f=D_{y_۱}\cap D_{y_۲}$$

پس ابتدا دامنه‌ی توابع $y_۱$ و $y_۲$ را می‌یابیم: $y_۱=\sqrt{[x]-x}$

$$[x]-x\geq ۰\Rightarrow [x]\geq x$$

از طرفی می‌دانیم همواره $[x]\leq x$ است، پس نامعادله‌ی بالا فقط در حالت تساوی برقرار است.

$$[x]=x\Rightarrow x\in Z\Rightarrow D_{y_۱}=Z$$

$$y_۲=\sqrt{[-x]}$$

$$[-x]\geq ۰\Rightarrow -x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۰\Rightarrow D_{y_۲}=(-\infty,۰]$$

پس دامنه‌ی تابع f برابر است با:

$$D_f=D_{y_۱}\cap D_{y_۲}=Z\cap(-\infty,۰]=\{\dots,-۳,-۲,-۱,۰\}$$

۱۰۷۶. گزینه‌ی ۱

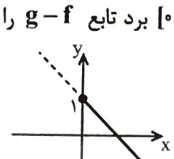
دامنه‌ی تابع f و g فاصله‌ی $[۰,+\infty)$ است. پس دامنه‌ی تابع $g-f$ برابر است با:

$$D_{g-f}=D_g\cap D_f=[۰,+\infty)$$

حال ضابطه‌ی $g-f$ را می‌یابیم:

$$(g-f)(x)=g(x)-f(x)=(۱+\sqrt{x})-(x+\sqrt{x})$$
$$\Rightarrow(g-f)(x)=۱-x$$

رسم نمودار تابع $y=۱-x$ در فاصله‌ی $[۰,+\infty)$ برد تابع $g-f$ را می‌یابیم:



ابراین برد تابع $g-f$ بازه‌ی $(-\infty,$ است.

۱۰۷۷. گزینه‌ی ۳

$$f(۲x-۳)=۲x-۳-[۲x-۳]=۲x-[۲x]$$
$$۲f(x)=۲(x-[x])=۲x-۲[x]$$

بنابراین:

$$g(x)=۲x-[۲x]-(۲x-۲[x])\Rightarrow g(x)=۲[x]-[۲x]$$

فرض کنید $n\in Z$ و $۰\leq p<۱$، $x=n+p$ آنگاه $۲x=۲n+۲p$،

لذا:

$$g(x)=۲[n+p]-[۲n+۲p],n\in Z$$
$$g(x)=۲n+۲[p]-۲n-[۲p]$$
$$g(x)=۲[p]-[۲p]\quad,\quad ۰\leq p<۱$$

$$g(x)=\begin{cases}۰-۰=۰ & ,\quad ۰\leq p<\frac{۱}{۲}\\ ۰-۱=-۱ & ,\quad \frac{۱}{۲}\leq p<۱\end{cases}$$

لذا برد تابع برابر $R_g=\{-۱,۰\}$ است.

۱۰۷۸. گزینه‌ی ۴

برای آنکه دو تابع مساوی باشند باید دامنه و ضابطه‌ی آنها با هم برابر باشد. هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $f(x)=\frac{\sqrt{۱+x}}{\sqrt{۱+x}}$ ؛ $g(x)=۱$

$$D_f:۱+x>۰\Rightarrow x>-۱$$
$$D_g=R$$

دامنه‌ی f و g برابر نیست پس دو تابع برابر نیستند.

گزینه‌ی (۲): $f(x)=\sqrt{x+۱}\times\sqrt{x-۱}$

$$\begin{cases}x+۱\geq ۰\Rightarrow x\geq -۱\\ x-۱\geq ۰\Rightarrow x\geq ۱\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}D_f=[۱,+\infty)$$

$$g(x)=\sqrt{x^۲-۱}$$
$$x^۲-۱\geq ۰\Rightarrow x^۲\geq ۱\Rightarrow x\geq ۱\cup x\leq -۱$$
$$\Rightarrow D_g=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

دامنه‌ی f و g برابر نیست پس دو تابع برابر نیستند.

گزینه‌ی (۳): $f(x)=\sqrt{x^۴-x^۲}$ و $g(x)=x\sqrt{x^۲-۱}$

ضابطه‌ی تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^۲(x^۲-۱)}=|x|\sqrt{x^۲-۱}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع f با g برابر نیست.

گزینه‌ی (۴): $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$

$$\begin{cases}x\geq ۰\\ -x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۰\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}x=\{۰\}\Rightarrow D_f=\{۰\}$$

$$g(x)=\sqrt{-x^۲}$$
$$-x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲\leq ۰\Rightarrow x=\{۰\}\Rightarrow D_g=\{۰\}$$

بنابراین ضابطه‌ی هر دو تابع برابر با $y=۰$ با دامنه‌ی $\{۰\}$ است، پس با هم برابرند.

۱۰۷۹. گزینه‌ی ۳

ابتدا دامنه‌ی تابع $f.g$ را می‌یابیم:

$$f(x)=\begin{cases}x & ,\quad x<-۳\\ ۲x^۲ & ,\quad x>۱\end{cases}$$
$$\Rightarrow D_f=(-\infty,-۳)\cup(۱,+\infty)$$

$$g(x)=\begin{cases} x & , \ |x|<۲ \\ \frac{۱}{x} & , \ x<-۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,-۵)\cup(-۲,۲)$$

$$D_{f.g}=D_f\cap D_g=(-\infty,-۵)\cup(۱,۲)$$

$$(f.g)(x)=\begin{cases} (x)(۲x^۲) & , \ ۱<x<۲ \\ (x)(\frac{۱}{x}) & , \ x<-۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f.g)(x)=\begin{cases} ۲x^۳ & , \ ۱<x<۲ \\ ۱ & , \ x<-۵ \end{cases}$$

۱۰۸۰. گزینه‌ی ۱

ابتدا دامنه‌ی تابع $f+g$ را می‌یابیم: $g(x)=\sqrt{۲-x^۲}$

$$D_g: ۲-x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲\le ۲ \Rightarrow |x|\le \sqrt{۲} \Rightarrow -\sqrt{۲}\le x\le \sqrt{۲}$$

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=R\cap[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]=[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$$

ضابطه‌ی تابع $f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f+g)(x)=\begin{cases} x+\sqrt{۲-x^۲} & , \ ۱\le x\le \sqrt{۲} \\ ۱+\sqrt{۲-x^۲} & , \ -\sqrt{۲}\le x<۱ \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ها و شرط آنها، مقادیر این تابع همواره مثبت است و هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

راهبرد حل تیپ (۲۶)

در انجام اعمال جبری روی دو تابع با نمایش زوج مرتبی آنها، به ازای مؤلفه‌های اول مشترک، اعمال جبری را روی مؤلفه‌های دوم توابع انجام می‌دهیم.

مثال: $f=\{(۰,۲),(۱,۴)\}$ $\quad$ $g=\{(۱,۳),(۲,۴)\}$

توجه کنید که تنها مؤلفه‌ی اول مشترک، یک است:

$$f.g=\{(۱,۴\times۳)\}=\{(۱,۱۲)\}$$

۱۰۸۱. گزینه‌ی ۴

با توجه به نمودار توابع، مقادیر را جایگزین می‌کنیم:

$$(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=-۱+۰=-۱$$

$$(\frac{f}{g})(۳)=\frac{f(۳)}{g(۳)}=\frac{۳}{۴}$$

۱۰۸۲. گزینه‌ی ۲

چون $D_{f-g}=\{۱,۳\}$ پس ۳ و ۱ حتماً در دامنه‌ی g هستند. همچنین ممکن است دامنهٔ g شامل عضوهای دیگری هم باشد.

$$(۱,-۴)\in f-g$$
$$\Rightarrow (f-g)(۱)=-۴ \Rightarrow f(۱)-g(۱)=-۴$$
$$\Rightarrow ۴-g(۱)=-۴ \Rightarrow g(۱)=۸$$
$$(۳,۱)\in f-g$$
$$\Rightarrow (f-g)(۳)=۱ \Rightarrow f(۳)-g(۳)=۱$$
$$\Rightarrow ۴-g(۳)=۱ \Rightarrow g(۳)=۳$$
$$\Rightarrow g(۱)-۲g(۳)=۸-۶=۲$$

۱۰۸۳. گزینه‌ی ۲

تابع $\frac{۱}{f}$ به ازای مقادیری که f صفر شود تعریف نمی‌شود، به ازای $x=۲$، $f(۲)=۰$ پس تابع $\frac{۱}{f}$ برابر است با:

$$\frac{۱}{f}=\left\{\left(۱,\frac{۱}{۱-۲}\right),\left(۳,\frac{۱}{۳-۲}\right),\left(۴,\frac{۱}{۴-۲}\right)\right\}$$

۱۰۸۴. گزینه‌ی ۲

از آنجا که تابع $\frac{۳f}{f-g}$ از دو تابع f و g تشکیل شده است، عددی که در دامنه‌ی هر دو تابع f و g وجود نداشته باشد نمی‌تواند در تشکیل آن شرکت داشته باشد، داریم:

$$D_f\cap D_g=\{۱,۲,۳\}\cap\{۱,۲,۴\}=\{۱,۲\}$$

همچنین به خاطر وجود $f-g$ در مخرج کسر، اعضایی از مجموعه‌ی $D_f\cap D_g$ که به ازای آنها مقدار دو تابع با هم برابرست، قابل قبول نیستند، بنابراین عدد ۲ حذف می‌شود، زیرا $f(۲)=g(۲)=۳$، پس:

$$D_{\frac{۳f}{f-g}}=\{۱\}$$

پس تابع $\frac{۳f}{f-g}$ از یک زوج مرتب تشکیل شده است.

۱۰۸۵. گزینه‌ی ۱

ابتدا دامنه‌ی توابع را می‌یابیم:

$D_f=\{۱,-۱,۳\}$ و $D_g=\{-۱,۱,۳\}$

$$D_{\frac{f}{g}}=(D_f\cap D_g)-\{x|g(x)=۰\}$$
$$=(\{۱,-۱,۳\}\cap\{-۱,۱,۳\})-\{۳\}=\{۱,-۱\}$$
$$D_{\frac{g}{f}}=(D_g\cap D_f)-\{x|f(x)=۰\}$$
$$=(\{-۱,۱,۳\}\cap\{۱,-۱,۳\})-\{-۱\}=\{۱,۳\}$$
$$D_{\frac{f}{g}+\frac{g}{f}}=D_{\frac{f}{g}}\cap D_{\frac{g}{f}}=\{۱,-۱\}\cap\{۱,۳\}=\{۱\}$$

بنابراین دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}+\frac{g}{f}$ یک عضو دارد، در نتیجه این تابع فقط شامل یک زوج مرتب خواهد بود.

۱۰۸۶. گزینه‌ی ۱

ابتدا دامنه‌ی تابع $f\times g$ را می‌یابیم، و سپس به ازای هر $x_۰\in D_f\cap D_g$ مقدار $f(x_۰)\times g(x_۰)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$D_f=R-\{-۲,۲\} \ , \ D_g=\{۰,۳,۲,۱\}$$
$$\Rightarrow D_f\cap D_g=\{۰,۳,۱\}$$
$$f\times g=\{(۰,f(۰)\times g(۰)),(۳,f(۳)\times g(۳)),(۱,f(۱)\times g(۱))\}$$
$$f\times g=\left\{(۰,-\frac{۱}{۴}\times۴),(۳,\frac{۴}{۵}\times(-۱)),(۱,-\frac{۲}{۳}\times۲)\right\}$$
$$f\times g=\left\{(۰,-۱),(۳,-\frac{۴}{۵}),(۱,-\frac{۴}{۳})\right\}$$

۱۰۸۷. گزینه‌ی ۱

از آنجا که $f^۲=f\times f$ است، برای یافتن $f^۲$ کافی است مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب f را به توان دو برسانیم:

$$\{(-۱,a),(۰,۱),(۱,b)\}$$
$$\Rightarrow \{(-۱,a^۲),(۰,۱),(۱,b^۲)\}$$

بنابراین:

$$D_{\frac{f^۲}{f}}\ \left\{(-۱,\frac{۴}{a^۲}),(۰,\frac{۴}{۱}),(۱,\frac{۴}{b^۲})\right\}$$

از طرفی طبق فرض سؤال داریم: $\frac{۴}{f^۲} = \{(۰\,,۴)\,,(−۱\,,۱)\}$، بنابراین $(۱\,,\frac{۴}{b^۲})$ وجود ندارد، پس باید $b^۲ = ۰$ باشد. همچنین باید $\frac{۴}{a^۲} = ۱$ باشد، در نتیجه: $a^۲ = ۴$ بنابراین:

$$a^۲ - b^۲ = ۴ - ۰ = ۴$$

۱۰۸۸. گزینه‌ی ۴

$$f = \{(۱\,,-۲)\,,(۲\,,-۴)\,,(۳\,,۲)\} \Rightarrow D_f = \{۱\,,۲\,,۳\}$$
$$g = \{(۱\,,۱)\,,(۲\,,۲)\} \Rightarrow D_g = \{۱\,,۲\}$$

در تمامی اعمال جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم این دو تابع، دامنه‌ی آنها برابر است با:

$$D_f \cap D_g = \{۱\,,۲\}$$

حال هر یک از اعمال را روی توابع انجام می‌دهیم:

گزینه‌ی (۱): جمع دو تابع

$f+g = \{(۱\,,-۱)\,,(۲\,,-۲)\} \to$ یک به یک است.

گزینه‌ی (۲): ضرب دو تابع

$f.g = \{(۱\,,-۲)\,,(۲\,,-۸)\} \to$ یک به یک است.

گزینه‌ی (۳): تفاضل دو تابع

$f-g = \{(۱\,,-۳)\,,(۲\,,-۶)\} \to$ یک به یک است.

$g-f = \{(۱\,,۳)\,,(۲\,,۶)\} \to$ یک به یک است.

گزینه‌ی (۴): تقسیم دو تابع $\frac{f}{g} = \{(۱\,,-۲)\,,(۲\,,-۲)\}$

چون مؤلفه‌ی دوم زوج‌های مرتب متمایز یکسان است، پس این تابع یک به یک نیست.

۱۰۸۹. گزینه‌ی ۴

می‌دانیم $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ پس داریم:

$$a + b = ۱$$

هم‌چنین می‌دانیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f+g)(۲) = f(۲) + g(۲) \Rightarrow ۱ = -۱ + a - b$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a+b=۱ \\ a-b=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۳}{۲} \\ b = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ab = -\frac{۳}{۴}$$

۱۰۹۰. گزینه‌ی ۲

$$f^{-۱} = \{(۲,۱),(۳,-۲),(۴,-۱)\}$$
$$\Rightarrow f = \{(۱,۲),(-۲,۳),(-۱,۴)\}$$
$$D_{f-۲g} = D_f \cap D_g \Rightarrow \{۱,-۲,-۱\} \cap D_g = \{-۲,-۱\}$$

پس ۲− و ۱− حتماً در D_g هستند و ۱ قطعاً در آن نیست.

$$\xrightarrow{(-۲\,,-۱)\in f-۲g} f(-۲) - ۲g(-۲) = -۱$$
$$\Rightarrow ۳ - ۲g(-۲) = -۱ \Rightarrow g(-۲) = ۲ \Rightarrow (۲,-۲) \in g^{-۱}$$
$$\xrightarrow{(-۱\,,۸)\in f-۲g} f(-۱) - ۲g(-۱) = ۸$$
$$\Rightarrow ۴ - ۲g(-۱) = ۸ \Rightarrow g(-۱) = -۲ \Rightarrow (-۲,-۱) \in g^{-۱}$$

راهبرد حل تیپ (۲۷)

در نمایش نموداری دو تابع، اعمال جبری را روی عرض نقاط دو تابع، به ازای طول‌های مشترک انجام می‌دهیم.

۱۰۹۱. گزینه‌ی ۳

$$\frac{(f+g)(۱۴)}{(f.g)(۷)} = \frac{f(۱۴)+g(۱۴)}{f(۷).g(۷)} \quad (*)$$

$$f(x) = \sqrt{x+۲} \Rightarrow f(۷) = \sqrt{۹} = ۳ \text{ و } f(۱۴) = \sqrt{۱۶} = ۴$$

از طرفی با توجه به نمودار، g یک تابع خطی است که از دو نقطه‌ی $(۱\,,۰)$ و $(۰\,,۱)$ می‌گذرد، یعنی اگر ضابطه‌ی آن را به صورت $g(x) = ax + b$ فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases} (۱\,,۰)\in g \Rightarrow g(۱) = ۰ \Rightarrow a+b=۰ \\ (۰\,,۱)\in g \Rightarrow g(۰) = ۱ \Rightarrow ۰+b=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-۱ \\ b=۱ \end{cases}$$
$$\Rightarrow g(x) = -x+۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} g(۷) = -۶ \\ g(۱۴) = -۱۳ \end{cases} \xrightarrow{(*)} \frac{(f+g)(۱۴)}{(f.g)(۷)} = \frac{۴-۱۳}{۳\times(-۶)}$$
$$\Rightarrow \frac{(f+g)(۱۴)}{(f.g)(۷)} = \frac{-۹}{۳\times(-۶)} = \frac{۱}{۲}$$

۱۰۹۲. گزینه‌ی ۱

از آنجا که $(f.g)(۲) = f(۲).g(۲)$، مقادیر $f(۲)$ و $g(۲)$ را می‌یابیم.

با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$f(۲) = ۳$$

نمودار تابع g برای $-۲ \le x \le ۴$، یک تابع خطی است. با توجه به اینکه نقاط $(-۲\,,-۱)$ و $(۴\,,-۴)$ روی نمودار تابع g قرار دارند، داریم:

$$y - (-۱) = \frac{-۱-(-۴)}{-۲-۴}(x-(-۲))$$
$$\Rightarrow g(x) = \frac{-۱}{۲}x - ۲ \;\;;\;\; -۲ \le x \le ۴$$
$$\xrightarrow{x=۲} g(۲) = \frac{-۱}{۲}(۲) - ۲ = -۳$$

بنابراین:

$$(f.g)(۲) = f(۲).g(۲) = (۳)(-۳) = -۹$$

۱۰۹۳. گزینه‌ی ۳

نمودار تابع f خطی است و با توجه به نمودار، طول از مبدأ آن ۵ و عرض از مبدأ آن ۲ است، بنابراین ضابطه‌ی آن برابر است با:

$$\frac{x}{۵} + \frac{y}{۲} = ۱ \Rightarrow f(x) = -\frac{۲}{۵}x + ۲$$

نمودار تابع g نیز خطی است و با توجه به نمودار، طول از مبدأ آن ۲ و عرض از مبدأ آن ۳- است، بنابراین ضابطه‌ی آن برابر است با:

$$\frac{x}{۲} + \frac{y}{-۳} = ۱ \Rightarrow g(x) = \frac{۳}{۲}x - ۳$$

بنابراین تابع $f+g$ برابر است با:

$$(f+g)(x) = -\frac{۲}{۵}x + ۲ + \frac{۳}{۲}x - ۳ = \frac{۱۱}{۱۰}x - ۱$$

حال تابع $(f+g)^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y = \frac{۱۱}{۱۰}x - ۱ \Rightarrow \frac{۱۱}{۱۰}x = y+۱ \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۱۱}(y+۱)$$
$$\Rightarrow (f+g)^{-۱}(x) = \frac{۱۰}{۱۱}(x+۱)$$
$$\xrightarrow{x=۰} (f+g)^{-۱}(۰) = \frac{۱۰}{۱۱}$$

۱۰۹۴. گزینه‌ی ۴

با توجه به نمودارهای تابع f و g، داریم:

$$D_f=[-۳,۲]$$
$$D_g=[-۳,۳]$$
$$D_{(\frac{۲f^۲}{g})}=(D_f\cap D_g)-\{x\,|\,g(x)=۰\}$$
$$=[-۳,۲]-\{-۳,۰,۳\}=(-۳,۰)\cup(۰,۲]$$

۱۰۹۵. گزینه‌ی ۴

با توجه به نمودار، دامنه‌ی توابع f و g برابر است با:

$$D_f=[-۲,+\infty) \text{ و } D_g=(-\infty,۲]$$

بنابراین:

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_f\cap D_g=[-۲,۲]$$
$$D_{\frac{f+g}{f-g}}=(D_{f+g}\cap D_{f-g})-\{x\,|\,\underbrace{(f-g)(x)=۰}_{f(x)=g(x)}\}$$
$$=[-۲,۲]-\{۰\}\xrightarrow{\text{مقادیر صحیح}}-۲,-۱,۱,۲$$

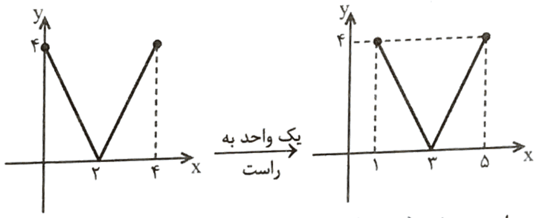
دقت کنید که فقط در $x=۰$ داریم: $f(۰)=g(۰)$ بنابراین:

$$f(۰)-g(۰)=۰$$

۱۰۹۶. گزینه‌ی ۲

با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع f برابر است با: $D_f=[۰,۴]$

حال نمودار تابع $f(x-۱)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را می‌یابیم:



بنابراین دامنه‌ی تابع $g(x)=f(x-۱)$ برابر است با: $D_g=[۱,۵]$

دامنه‌ی تابع $y=\frac{f(x-۱)}{۲-f(x)}$ را می‌یابیم:

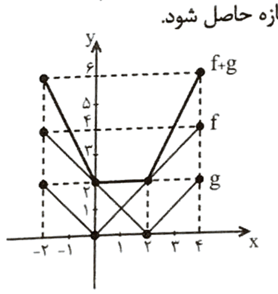
$$D_y=(D_g\cap D_f)-\{x\,|\,۲-f(x)=۰\}$$
$$=([۰,۴]\cap[۱,۵])-\{x\,|\,f(x)=۲\}$$

از روی نمودار تابع f می‌توان مشاهده کرد که مقدار تابع f به ازای $x=۱,۳$ برابر با ۲ می‌شود، پس:

$$D_y=[۱,۴]-\{۱,۳\}=(۱,۴]-\{۳\}$$

۱۰۹۷. گزینه‌ی ۳

برای یافتن نمودار تابع $f+g$ کافی است در نقاط با طول مشترک، عرض نقاط را با هم جمع کنیم. توجه کنید که تابع f و g به صورت تکه‌ای خطی هستند، برای یافتن نمودار تابع $f+g$ در هر یک از بازه‌ها کافی است عرض نقاط ابتدای بازه را با هم و انتهای بازه را با هم جمع کرده و سپس آنها را به هم وصل کنیم تا نمودار $f+g$ در آن بازه حاصل شود.



با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع $f+g$ در بازه‌ی $[۰,۲]$ تابع ثابت $y=۲$ است.

۱۰۹۸. گزینه‌ی ۱

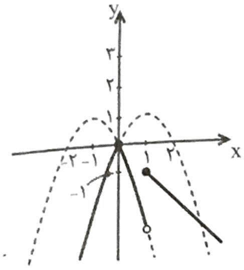
$$f(x)=\begin{cases}-x^۲ & x<۱\\ x & x\geq ۱\end{cases}$$

$$g(x)=۲|x|=\begin{cases}-۲x & x\leq ۰\\ ۲x & x>۰\end{cases}$$

ضابطه‌ی تابع $f-g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f-g)(x)=\begin{cases}-x^۲+۲x & x\leq ۰\\ -x^۲-۲x & ۰<x<۱\\ -x & x\geq ۱\end{cases}$$

نمودار تابع $f-g$ را رسم می‌کنیم:

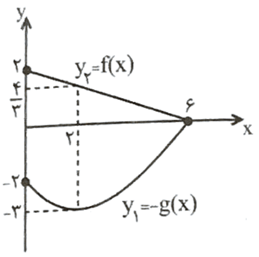


نمودار تابع $f-g$ از ناحیه‌ی اول و دوم عبور نمی‌کند.

۱۰۹۹. گزینه‌ی ۱

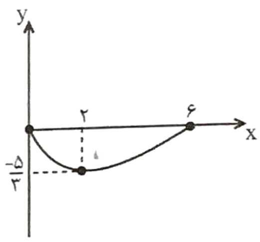
$$y=f(x)-g(x)$$

بهتر است ابتدا تابع با ضابطه‌ی $y_۱=-g(x)$ را رسم کنیم و سپس در هر $x_۰$ مشترک، عرض‌ها را با هم جمع کنیم. برای رسم تابع با ضابطه‌ی $y_۱=-g(x)$، قرینه‌ی تابع g را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم. (مطابق شکل)



حال نقاط مهم را در تابع مجموع می‌یابیم. $C(۶,۰-۰)$ و $A(۰,۲-۲)$ و $B(۲,\frac{۴}{۳}-۳)$

بنابراین نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=(f-g)(x)$ به صورت مقابل خواهد بود.



۱۱۰۰. گزینه‌ی ۱

با توجه به نمودار، تابع $f.g$ یک تابع درجه‌ی دوم است که ریشه‌های آن ۱ و ۳- هستند، پس ضابطه‌ی آن به‌صورت $y=k(x-۱)(x+۳)$ است. این تابع از نقطه‌ی $(۰,۶)$ می‌گذرد، پس:

$$۶=k(-۱)(۳)\Rightarrow k=-۲$$

پس ضابطه‌ی تابع $f.g$ به‌صورت $(f.g)(x)=-۲(x-۱)(x+۳)$ است.

از طرفی صفر تابع f با یکی از صفرهای تابع $f.g$ برابر است. با توجه به نمودار، صفر تابع f عددی مثبت است و ریشه‌های $f.g$ برابر ۱ و ۳- هستند، پس عدد ۱ صفر تابع f است، بنابراین $(۱,۰)\in f$. با توجه به نمودار، تابع f از نقطه‌ی $(۰,۱)$ نیز می‌گذرد. بنابراین:

$$\xrightarrow[(۱,۰)\in f]{(۰,۱)\in f} y-۰=\frac{۱-۰}{۰-۱}(x-۱)$$
$$\Rightarrow y=-x+۱\Rightarrow f(x)=-(x-۱)$$

با داشتن ضابطه‌ی f و $f.g$، ضابطه‌ی g را به‌دست می‌آوریم:

$$)(x)=f(x)g(x)$$
$$\Rightarrow (x-۱)(x+۳)=-(x-۱)g(x)$$
$$=۲(x+۳)=۲x+۶$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع $f+g$ برابر است با:

$$=f(x)+g(x)=-x+۱+۲x+۶=x+۷$$

گزینه‌ی (۱)، نمودار تابع $f+g$ است.

راهبرد حل تیپ (۲۸)

برای محاسبه‌ی $(fog)(a)$، داریم:

$$(fog)(a)=f(g(a))$$

ابتدا مقدار تابع g را در a محاسبه کرده و سپس مقدار تابع f را در $g(a)$ می‌یابیم.

توجه کنید که شرط تشکیل $(fog)(a)$ آن است که g در a و f در $g(a)$ تعریف شده باشد.

۱۱۰۱. گزینه‌ی ۲

با توجه به جدول، ابتدا هریک از مقادیر را محاسبه می‌کنیم:

$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))\xrightarrow{g(-۱)=۲}f(۲)=۴$$

$$(gof)(۰)=g(f(۰))\xrightarrow{f(۰)=۱}g(۱)=۵$$

$$f(-g(۲))\xrightarrow{g(۲)=-۱}f(-(-۱))=f(۱)=-۳$$

$$\Rightarrow \frac{(fog)(-۱)+(gof)(۰)}{f(-g(۲))}=\frac{۴+۵}{-۳}=\frac{۹}{-۳}=-۳$$

۱۱۰۲. گزینه‌ی ۲

با توجه به نمودار، مقدار $(gof)(۱)$ و $(fog)(۰)$ را می‌یابیم:

$$(gof)(۱)=g(f(۱))\xrightarrow{f(۱)=-۲}g(-۲)=-۱$$

$$(fog)(۰)=f(g(۰))\xrightarrow{g(۰)=-۲}f(-۲)=۱$$

$$\Rightarrow \frac{(gof)(۱)}{(fog)(۰)}=\frac{-۱}{۱}=-۱$$

۱۱۰۳. گزینه‌ی ۳

$$f(x)=۲x+۳\ ,\ g(x)=x-۴$$

$$(۱)\ (fog)(۲)=f(g(۲))$$

$$g(۲)=۲-۴=-۲$$

$$f(g(۲))=f(-۲)=۲(-۲)+۳=-۴+۳=-۱$$

$$(۲)\ (gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۱)=۱-۴=-۳$$

$$\Rightarrow \frac{(fog)(۲)}{(gof)(-۱)}=\frac{-۱}{-۳}=\frac{۱}{۳}$$

۱۱۰۴. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=|x| \text{ و } g(x)=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$$

$$(fog)(۱-\sqrt{۲})-(gof)(۱-\sqrt{۲})$$

$$=f(g(۱-\sqrt{۲}))-g(f(۱-\sqrt{۲}))$$

$$=f((۱-\sqrt{۲}+۱)^۲)-g(|\overbrace{۱-\sqrt{۲}}^{\text{منفی}}|)$$

$$=f((۲-\sqrt{۲})^۲)-g(\sqrt{۲}-۱)$$

$$=|۴+۲-۴\sqrt{۲}|-(\sqrt{۲}-۱+۱)^۲$$

$$=|\overbrace{۶-۴\sqrt{۲}}^{\text{مثبت}}|-۲=۶-۴\sqrt{۲}-۲=۴(۱-\sqrt{۲})$$

۱۱۰۵. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=[x]\ ,\ g(x)=\frac{x}{۱-x}$$

$$\Rightarrow g(\sqrt{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}}\times\frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}+۲}{-۱}=-\sqrt{۲}-۲$$

$$(fog)(\sqrt{۲})=f(g(\sqrt{۲}))=f(-\sqrt{۲}-۲)$$

$$=[-\sqrt{۲}-۲]=[-\sqrt{۲}]-۲=-۴$$

۱۱۰۶. گزینه‌ی ۳

می‌دانیم:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & ;\ x\in Z\\ -۱ & ;\ x\notin Z\end{cases}$$

حال تابع $g(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=\begin{cases}g(۰)=۰^۲+۰-۲=-۲ & ;\ x\in Z\\ g(-۱)=(-۱)^۲+(-۱)-۲=-۲ & ;\ x\notin Z\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(f(x))=-۲\ ;\ x\in R$$

۱۱۰۷. گزینه‌ی ۳

از آنجایی که $(fog)(a)=f(g(a))=۰$ است، ابتدا باید ببینیم که تابع f به ازای چه مقداری برابر با صفر می‌شود. با توجه به نمودار، تابع f به ازای $x=-۲$ برابر با صفر است، پس $f(-۲)=۰$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}f(g(a))=۰\\ f(-۲)=۰\end{cases}\Rightarrow g(a)=-۲$$

با توجه به نمودار، $g(-۲)=-۲$ است، در نتیجه: $a=-۲$

۱۱۰۸. گزینه‌ی ۱

برای حل معادله‌ی $(fof)(x)=f(f(x))=۴$، ابتدا باید ببینیم که تابع f به ازای چه مقداری برابر با ۴ می‌شود. با توجه به نمودار، تابع f از نقطه‌ی $(-۱\ ,\ ۴)$ می‌گذرد، بنابراین $f(-۱)=۴$ و خواهیم داشت:

$$\begin{cases}f(f(x))=۴\\ f(-۱)=۴\end{cases}\Rightarrow f(x)=-۱$$

از آنجا که تابع f از نقطه‌ی $(۳\ ,\ -۱)$ عبور می‌کند، پس $f(۳)=-۱$، در نتیجه $x=۳$.

۱۱۰۹. گزینه‌ی ۲

ابتدا جواب‌های معادله‌ی $f(x)=۱$ را می‌یابیم:

$$f(x)=۱\Rightarrow x^۳-۷=۱\Rightarrow x^۳=۸\Rightarrow x=۲$$

پس برای محاسبه‌ی ریشه‌های معادله‌ی $f(g(x))=۱$، معادله‌ی $g(x)=۲$ را حل می‌کنیم.

هر یک از ضابطه‌ها را برابر با ۲ قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{x\geq ۲} x^۲-۱=۲\Rightarrow x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}\ \times$$

(در دامنه‌ی $x\geq ۲$ قرار ندارند.)

$$\xrightarrow{x<۲} \frac{x-۱}{x+۱}=۲\Rightarrow x-۱=۲x+۲\Rightarrow x=-۳\ \checkmark$$

(در دامنه‌ی $x<۲$ قرار دارد.)

پس معادله‌ی $(fog)(x)=۱$ فقط جواب $x=-۳$ را دارد.

راهبرد حل تیپ (۲۹)

نماد $(fog)(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))$$

و به این معنی است که در تابع $f(x)$ هرجا به جای x قرار دهیم $g(x)$.

به عنوان مثال اگر $f(x)=x^۳+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ آنگاه $(fog)(x)$ برابر است با: $f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^۳+۱=x\sqrt{x}+۱$

۱۱۱۰. گزینه‌ی ۳

$$f(x)=۳x+a \text{ و } g(x)=۲-x$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=۳g(x)+a=۳(۲-x)+a=۶-۳x+a$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=۲-f(x)=۲-(۳x+a)=۲-۳x-a$$

$$\Rightarrow (fog)(x)-(gof)(x)=(۶-۳x+a)-(۲-۳x-a)$$

$$=۴+۲a\Rightarrow ۴+۲a=۶\Rightarrow ۲a=۲\Rightarrow a=۱$$

۱۱۱۱. گزینه‌ی ۴

راه حل اول:

$$g(f(x))=g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=\frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)+2}{2-\frac{2x-1}{x+1}}=\frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}}$$

$$=\frac{6x}{3}=2x$$

راه حل دوم: با توجه به ضابطه‌های f و g، مقدار $g(f(\frac{1}{2}))$ را به‌دست آورده و گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که به ازای $x=\frac{1}{2}$ با عدد به‌دست آمده برابر باشد.

$f(\frac{1}{2})=0 \Rightarrow g(f(\frac{1}{2}))=g(0)=1 \Rightarrow$ گزینه‌ی (۴) درست است.

توجه کنید: گزینه‌های تست کامل نیستند زیرا باید دامنه‌ی تابع نیز در کنار آن نوشته می‌شد، اما بنظر می‌آید که فقط ضابطه مد نظر طراح بوده است.

۱۱۱۲. گزینه‌ی ۲

معادله‌ی خطی که از نقاط $A(0\,,a)$ و $B(a\,,0)$ می‌گذرد برابر است با:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$$

پس $x+y=a$ در نتیجه $f(x)=a-x$ بنابراین:

$$(fof)(x)=f(f(x))=f(a-x)=a-(a-x)=x$$

۱۱۱۳. گزینه‌ی ۴

با تعیین علامت قدرمطلق، تابع دو ضابطه‌ای زیر حاصل می‌شود:

$$f(x)=\begin{cases}0 & ,\ x\geq 0\\ -2x & ,\ x<0\end{cases}$$

$$x\geq 0\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow f(f(x))=f(0)=0$$

$$x<0\Rightarrow f(x)=-2x\Rightarrow f(-2\underbrace{x}_{x<0})=f(\text{مقادیر مثبت})=0$$

$$\Rightarrow (fof)(x)=0$$

۱۱۱۴. گزینه‌ی ۲

محل تلاقی دو تابع fog و f از حل معادله‌ی $(fog)(x)=f(x)$ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}f(x)=(2x-3)^2\\ g(x)=x+2\end{cases}\Rightarrow f(g(x))=(2g(x)-3)^2$$

$$=(2(x+2)-3)^2=(2x+1)^2$$

$$\begin{cases}f(x)=(2x-3)^2\\ (fog)(x)=(2x+1)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow fog \text{ و } f \text{ معادله‌ی تقاطع}: (2x-3)^2=(2x+1)^2$$

$$\Rightarrow 2x-3=\pm(2x+1)\Rightarrow\begin{cases}2x-3=2x+1 & (\text{غیرقابل قبول})\\ 2x-3=-2x-1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

پس در نقطه به‌طول $\frac{1}{2}$ متقاطعند.

۱۱۱۵. گزینه‌ی ۱

توابع fog و gof را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x+2} \text{ و } g(x)=x+4$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x+4)=\frac{2(x+4)-1}{x+4+2}=\frac{2x+7}{x+6}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)=\frac{2x-1}{x+2}+4$$

$$=\frac{2x-1+4x+8}{x+2}=\frac{6x+7}{x+2}$$

بنابراین:

$$(fog)(x)=(gof)(x)\Rightarrow\frac{2x+7}{x+6}=\frac{6x+7}{x+2}$$

$$\Rightarrow(2x+7)(x+2)=(6x+7)(x+6)$$

$$\Rightarrow 2x^2+4x+7x+14=6x^2+36x+7x+42$$

$$\Rightarrow 4x^2+32x+28=0\xrightarrow{\div 4}x^2+8x+7=0$$

$$\Rightarrow(x+7)(x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-7\\ x=-1\end{cases}$$

۱۱۱۶. گزینه‌ی ۴

$$f(x)=x^2+x+1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(3x)=(3x)^2+(3x)+1=9x^2+3x+1\\ f(x+1)=(x+1)^2+(x+1)+1=x^2+3x+3\end{cases}$$

$$f(3x)=f(x+1)\Rightarrow 9x^2+3x+1=x^2+3x+3$$

$$\Rightarrow 8x^2=2\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\xrightarrow{x<0}x=\frac{-1}{2}$$

۱۱۱۷. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=x^2$$

$$f(f(x)-1)=1\Rightarrow f(x^2-1)=1\Rightarrow(x^2-1)^2=1$$

$$\Rightarrow x^2-1=\pm 1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x^2-1=1\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2} & :\text{دو ریشه‌ی ساده}\\ x^2-1=-1\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0 & :\text{ریشه‌ی مضاعف}\end{cases}$$

۱۱۱۸. گزینه‌ی ۱

برای به دست آوردن مجموعه‌ی طول نقاطی که نمودار تابع gof بالای محور x ها قرار می‌گیرد، باید نامعادله‌ی $(gof)(x)>0$ را حل کنیم. ابتدا ضابطه‌ی gof را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}f(x)=x^2+3x\\ g(x)=-\frac{1}{2}x+2\end{cases}$$

$$\Rightarrow(gof)(x)=g(f(x))=-\frac{1}{2}f(x)+2$$

$$\Rightarrow(gof)(x)=-\frac{1}{2}(x^2+3x)+2$$

$$\Rightarrow(gof)(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$$

$$(gof)(x)>0\Rightarrow-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2>0$$

$$\xrightarrow{\times(-2)}x^2+3x-4<0$$

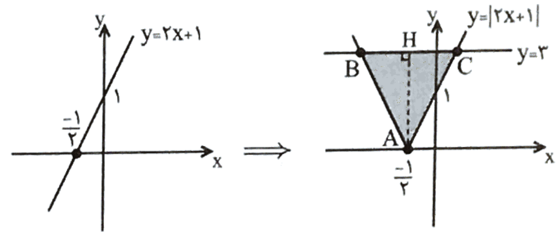
$$\Rightarrow(x-1)(x+4)<0\Rightarrow-4<x<1\Rightarrow x\in(-4,1)$$

۱۱۱۹. گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases}f(x)=x^2+x\\ g(x)=\sqrt{4x+1}\end{cases}\Rightarrow(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{4f(x)+1}$$

$$\Rightarrow(gof)(x)=\sqrt{4x^2+4x+1}=\sqrt{(2x+1)^2}=|2x+1|$$

می‌خواهیم مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار به معادله‌ی $y=|۲x+۱|$ و خط به معادله‌ی $y=۳$ را به‌دست آوریم:



با توجه به شکل بالا، مساحت مثلث ABC مورد نظر سؤال است که برای به‌دست آوردن آن باید طول BC را محاسبه کنیم.
برای این منظور باید نقاط تقاطع خط $y=۳$ با نمودار $y=|۲x+۱|$ را مشخص کنیم.

$$\begin{cases} y=۳ \\ y=|۲x+۱| \end{cases} \Rightarrow |۲x+۱|=۳ \Rightarrow ۲x+۱=\pm ۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x+۱=۳ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow x_C=۱ \\ ۲x+۱=-۳ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow x_B=-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC = x_C - x_B = ۳$$

طول ارتفاع AH هم برابر ۳ است، پس خواهیم داشت:

$$S(\overset{\Delta}{ABC}) = \frac{۱}{۲}AH\times BC = \frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۱۱۲۰. گزینه‌ی ۲

برای یافتن نقاط تقاطع تابع fog با محور xها باید معادله‌ی $(fog)(x)=۰$ را حل کنیم، یعنی:

$$f(g(x))=۰$$

برای حل این معادله هم ابتدا ریشه‌های f را می‌یابیم. چون f در دو نقطه به طول‌های ۶ و $\frac{-۱}{۴}$ محور xها را قطع می‌کند، پس:

$$f(x)=۰ \Rightarrow x=۶\, ,\, x=\frac{-۱}{۴}$$

$$\Rightarrow f(g(x))=۰ \Rightarrow g(x)=۶\, ,\, g(x)=\frac{-۱}{۴}$$

از آنجا که $g(x)=x-\sqrt{x}$، بنابراین:

$$x-\sqrt{x}=۶ \quad \text{و} \quad x-\sqrt{x}=\frac{-۱}{۴}$$

با توجه به گزینه‌ها $x=۹$ ریشه‌ی معادله‌ی اول و $x=\frac{۱}{۴}$ ریشه‌ی معادله‌ی دوم است.

۱۱۲۱. گزینه‌ی ۴

راه حل اول: با فرض $۲x-۳=X$ داریم: $x=\frac{X+۳}{۲}$، پس:

$$f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$$

$$f(X)=۴(\frac{X+۳}{۲})^۲-۱۴(\frac{X+۳}{۲})+۱۳$$

$$\Rightarrow f(X)=(X+۳)^۲-۷(X+۳)+۱۳$$

$$\Rightarrow f(X)=X^۲-X+۱$$

راه حل دوم: در تساوی $f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۴x+۱۳$ قرار می‌دهیم $x=۲$، بنابراین: $f(۱)=۱۶-۲۸+۱۳=۱$ که $f(۱)=۱$ تنها در گزینه‌ی (۴) برقرار است.

۱۱۲۲. گزینه‌ی ۴

راه حل اول:

$$x-۳=a \Rightarrow x=a+۳$$

$$\Rightarrow f(a)=(a+۳)^۲-۴(a+۳)+۵$$

$$=a^۲+۶a+۹-۴a-۱۲+۵=a^۲+۲a+۲$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۲+۲x+۲$$

$$\Rightarrow f(۱-x)=(۱-x)^۲+۲(۱-x)+۲$$

$$=۱+x^۲-۲x+۲-۲x+۲=x^۲-۴x+۵$$

راه حل دوم: می‌توان در رابطه‌ی اولیه به جای x، $۴-x$ قرار داد تا به‌طور مستقیم به $f(۱-x)$ رسید.

$$\xrightarrow{x\to ۴-x} f(۴-x-۳)=f(۱-x)$$

$$=(۴-x)^۲-۴(۴-x)+۵$$

$$=۱۶+x^۲-۸x-۱۶+۴x+۵=x^۲-۴x+۵$$

$$\Rightarrow f(۱-x)=x^۲-۴x+۵$$

۱۱۲۳. گزینه‌ی ۲

در رابطه‌ی $f(x+۱)+f(۳)=۲x+۱$ با تبدیل x به $x-۱$ خواهیم داشت:

$$f(x-۱+۱)+f(۳)=۲(x-۱)+۱$$

$$\Rightarrow f(x)+f(۳)=۲x-۱$$

حال با قرار دادن $x=۳$، $f(۳)$ را می‌یابیم:

$$f(۳)+f(۳)=۲\times ۳-۱ \Rightarrow ۲f(۳)=۵ \Rightarrow f(۳)=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع f به صورت $f(x)=۲x-۱-\frac{۵}{۲}=۲x-\frac{۷}{۲}$ است. محل تقاطع تابع $(fof)(x)$ با محور yها به ازای $x=۰$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$(fof)(۰)=f(f(۰))=f(۲\times ۰-\frac{۷}{۲})=f(\frac{-۷}{۲})=۲\times\frac{-۷}{۲}-\frac{۷}{۲}$$

$$=\frac{-۱۴}{۲}-\frac{۷}{۲}=\frac{-۲۱}{۲}$$

۱۱۲۴. گزینه‌ی ۱

در تابع $f(x)=۲x^۲+۴$، $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(g(x))=۲g^۲(x)+۴ & (۱) \\ f(g(x))=۴x^۲+۶x & (۲) \end{cases}$$

سمت چپ دو معادله برابرند، پس سمت راست آن‌ها نیز برابرند:

$$۲g^۲(x)+۴=۴x^۲+۶x \Rightarrow g^۲(x)=۲x^۲+۳x-۲$$

به ازای $x=-۲$، $g(-۲)$ را می‌یابیم:

$$g^۲(-۲)=۲(-۲)^۲+۳(-۲)-۲$$

$$\Rightarrow g^۲(-۲)=۰ \Rightarrow g(-۲)=۰$$

۱۱۲۵. گزینه‌ی ۱

با توجه به اینکه $f(x)=۲x^۲+۱$، با تشکیل $(fog)(x)=f(g(x))$ خواهیم داشت:

$$(fog)(x)=f(g(x))=۲g^۲(x)+۱$$

از طرفی $(fog)(x)=۲x-۴\sqrt{x}+۳$، بنابراین:

$$۲g^۲(x)+۱=۲x-۴\sqrt{x}+۳$$

$$\Rightarrow ۲g^۲(x)=۲x-۴\sqrt{x}+۲$$

$$\Rightarrow g^۲(x)=x-۲\sqrt{x}+۱ \xrightarrow{x=۴} g^۲(۴)=۴-۲\sqrt{۴}+۱$$

$$\Rightarrow g^۲(۴)=۱ \Rightarrow g(۴)=۱ \text{ یا } -۱$$

۱۱۲۶. گزینه‌ی ۴

با توجه به اینکه $(gof)(x+1)=g(f(x+1))$، ابتدا $f(x+1)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{4x-1}{3}\Rightarrow f(x+1)=\frac{4(x+1)-1}{3}=\frac{4x+3}{3}=\frac{4}{3}x+1$$

$$\Rightarrow g(f(x+1))=\frac{2x+3}{5}\Rightarrow g(\frac{4}{3}x+1)=\frac{2x+3}{5}$$

برای یافتن $g(-1)$ کافی است قرار دهیم: $\frac{4}{3}x+1=-1$، بنابراین $x=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$، پس داریم:

$$g(\frac{4}{3}x+1)=\frac{2x+3}{5}$$

$$\xrightarrow{x=\frac{-3}{2}} g(-1)=\frac{2\times\frac{-3}{2}+3}{5}=\frac{-3+3}{5}=0$$

۱۱۲۷. گزینه‌ی ۳

ابتدا با توجه به اینکه $g(x)=\sqrt{x}$ و تشکیل تابع $f(g(x))$، تابع f را می‌یابیم:

$$f(g(x))=x^2+x\xrightarrow{g(x)=\sqrt{x}} f(\sqrt{x})=x^2+x$$

اگر $\sqrt{x}=t$، آنگاه $x=t^2$ و خواهیم داشت:

$$f(t)=(t^2)^2+t^2=t^4+t^2\Rightarrow f(x)=x^4+x^2$$

حال مقادیر $f(2g(1))$ و $g(2f(1))$ را می‌یابیم:

$$\begin{cases} f(2g(1))=f(2\times\sqrt{1})=f(2)=2^4+2^2=20 \\ g(2f(1))=g(2\times(1^4+1^2))=g(4)=\sqrt{4}=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(2g(1))+g(2f(1))=20+2=22$$

۱۱۲۸. گزینه‌ی ۳

$$f(g(x))=\begin{cases} g(x) & , g(x)\geq 0 \\ 3g(x) & , g(x)<0 \end{cases}$$

در ضابطه‌ی بالا، باید حدودی از x را بیابیم که $g(x)\geq 0$ است، در ضابطه‌ی تابع g به ازای $x\geq 0$، x^2 نامنفی است و در ضابطه‌ی پایین زمانی $g(x)<0$، که در تابع g، $x<0$ باشد پس:

$$f(g(x))=\begin{cases} x^2 & , x\geq 0 \\ 3(x) & , x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^2 & , x\geq 0 \\ 3x & , x<0 \end{cases}$$

۱۱۲۹. گزینه‌ی ۳

ابتدا تعداد باکتری‌ها (N) را برحسب زمان (t) می‌نویسیم، یعنی تابع با ضابطه‌ی $(NoT)(t)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$N(T(t))=20(4t+2)^2-80(4t+2)+500 \ , \ 0\leq t\leq 3$$

$$N(T(t))=320t^2+420 \ , \ 0\leq t\leq 3$$

وقتی $N(T(t))=1140$، آنگاه:

$$1140=320t^2+420\Rightarrow 720=320t^2$$

$$\Rightarrow t^2=2/25\Rightarrow t=1/5$$ ساعت

۱۱۳۰. گزینه‌ی ۱

هزینه‌ی تولید x ساعت کالا، تابع مرکب با ضابطه‌ی $c(x(t))$ خواهد بود، لذا باید $c(x(6))$ را محاسبه کنیم.

$$x(6)=40\times 6=240$$

$$c(x(6))=c(240)=70\times 240+800=17600$$ هزار تومان

راهبرد حل تیپ (۲۰)

تابع $f(g(x))$ را می‌توانیم با ماشین زیر نمایش دهیم که در آن ابتدا x وارد تابع g شده و سپس خروجی آن یعنی $g(x)$ وارد تابع f شده و خروجی $f(g(x))$ است.

$$x\longrightarrow\boxed{g}\xrightarrow{g(x)}\boxed{f}\longrightarrow f(g(x))$$

به عنوان مثال اگر ورودی ماشین زیر ۳ باشد، خروجی آن را می‌یابیم:

$$x\longrightarrow\boxed{x^2+1}\longrightarrow\boxed{\sqrt{3x}}\longrightarrow y$$

وقتی $x=3$ ورودی باشد، حاصل x^2+1 به ازای آن ۱۰ و این مقدار در $\sqrt{3x}$ خروجی را $\sqrt{30}$ می‌دهد. توجه کنید ضابطه‌ی این تابع را می‌توانیم به صورت $y=\sqrt{3(x^2+1)}$ بنویسیم.

۱۱۳۱. گزینه‌ی ۲

با توجه به ماشین مفروض سؤال، می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow{x}\boxed{f}\xrightarrow{f(x)}\boxed{g}\xrightarrow{g(f(x))}2x$$

$$\Rightarrow g(f(x))=2x\xrightarrow{g(x)=3x+4}3f(x)+4=2x$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2x-4}{3}\Rightarrow f(5)=2$$

۱۱۳۲. گزینه‌ی ۲

ابتدا مقدار k را پیدا می‌کنیم:

$$f(g(x))=6x+k\Rightarrow f(3x^3-2)=6x+k \text{ و } f(-\frac{19}{9})=1$$

$$\Rightarrow 3x^3-2=-\frac{19}{9}\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

$$f(-\frac{19}{9})=6(-\frac{1}{3})+k=1\Rightarrow k=3$$

پس رابطه‌ی $f(3x^3-2)=6x+3$ برقرار است. برای پیدا کردن $f(1)$ داریم:

$$3x^3-2=1\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$$

$$f(1)=6(1)+3\Rightarrow f(1)=9$$

۱۱۳۳. گزینه‌ی ۲

خروجی ماشین ۵- است، لذا:

$$\sqrt{x}-2x-4=-5\Rightarrow\sqrt{x}-2x+1=0\Rightarrow x=1$$

پس خروجی ماشین اول به ازای ورودی اولیه‌ی ۲، باید ۱ باشد، لذا:

$$2x+A\overset{x=2}{=\!=}1\Rightarrow 4+A=1\Rightarrow A=-3$$

راهبرد حل تیپ (۲۱)

از آنجایی که $(fog)(a)=f(g(a))$، پس برای محاسبه‌ی تابع fog وقتی دو تابع f و g به صورت زوج مرتب داده شده‌اند، مقدار تابع fog را در نقاط دامنه‌ی g حساب می‌کنیم.

به عنوان مثال اگر $g=\{(1,2)\}$ و $f=\{(2,5)\}$، آنگاه در تشکیل fog، ورودی از g گرفته می‌شود و خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{x=1} f(\underbrace{g(1)}_{2})=f(2)=5\rightarrow(1,5)\in fog$$

و داریم $fog=\{(1,5)\}$.

۱۱۳۴. گزینه‌ی ۳

با توجه به شکل داریم:

$$f=\{(1,3),(2,5),(-1,1)\}$$

$$g=\{(0,1),(5,-3),(4,-1)\}$$

برای محاسبه‌ی تابع fog از دامنه‌ی g شروع می‌کنیم:

$x=۰:(fog)(۰)=f(g(۰))=f(۱)=۳\Rightarrow(۰,۳)\in fog$

$x=۵:(fog)(۵)=f(g(۵))=f(-۳)$: وجود ندارد

$x=۴:(fog)(۴)=f(g(۴))=f(-۱)=۱\Rightarrow(۴,۱)\in fog$

$\Rightarrow fog=\{(۰,۳),(۴,۱)\}$

۱۱۳۵. گزینه‌ی ۳

با توجه به اینکه $(fog)(x)=f(g(x))$، برای آنکه تابع $f(g(x))$ تعریف شود، شرط اول آن است که x بتواند ورودی تابع g باشد، شرط دوم هم آن است که $g(x)$ بتواند ورودی تابع f باشد. از آنجا که در این سؤال تعداد ورودی‌های تابع g کم است، به ازای هر سه عضو دامنه‌ی تابع g، ترکیب $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$x=۱\Rightarrow (fog)(۱)=f(g(۱))=f(۴)=\frac{۱}{۴-۱}=\frac{۱}{۳}$

$\Rightarrow (۱,\frac{۱}{۳})\in fog$

$x=۲\Rightarrow (fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱)=\frac{۱}{۱-۱}$: تعریف نشده

$x=۳\Rightarrow (fog)(۳)=f(g(۳))=f(-۱)=\frac{۱}{-۱-۱}=\frac{-۱}{۲}$

$\Rightarrow (۳,\frac{-۱}{۲})\in fog$

$\Rightarrow fog=\left\{(۱,\frac{۱}{۳}),(۳,\frac{-۱}{۲})\right\}$

۱۱۳۶. گزینه‌ی ۳

با توجه به فرضیات مسأله، $f(x)=۲x-۱$ است لذا با توجه به این‌که $x\in A$ است:

$f(۱)=۱\ ,\ f(۲)=۳\ ,\ f(۳)=۵\ ,\ f(۴)=۷\ ,\ f(۵)=۹$

حال تابع $f(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$f(f(۱))=f(۱)=۱\quad ,f(f(۲))=f(۳)=۵$

$f(f(۳))=f(۵)=۹$

$f(f(۵))=f(۹)$ تعریف نمی‌شود

$f(f(۴))=f(۷)$ تعریف نمی‌شود

۱۱۳۷. گزینه‌ی ۳

نقطه‌ی $(۴,۲)\in fog$ است، پس: $f(g(۴))=۲$

با توجه به زوج‌های مرتب f، $f(۳)=۲$، پس $g(۴)=۳$ لذا با توجه به زوج‌های مرتب g، $a=۴$ است، از طرفی نقطه‌ی $(۴,۱)\in gof$ است، لذا:

$g(f(۴))=۱$

اما $f(۴)=۵$، پس باید نقطه‌ی $(۵,۱)$ متعلق به تابع g باشد، لذا $b=۵$ و از آنجا: $(a,b)=(۴,۵)$

۱۱۳۸. گزینه‌ی ۴

فرض کنید که (*) $f(a)=t$، بنابراین از معادله‌ی $g(f(a))=۵$، نتیجه می‌شود که $g(t)=۵$، همچنین با توجه به اینکه زوج مرتب $(۶,۵)$ عضو تابع g است پس $g(۶)=۵$، نتیجه آنکه:

$\begin{cases}g(t)=۵\\g(۶)=۵\end{cases}\xrightarrow{\text{g یک به یک است}} t=۶\xrightarrow{(*)} f(a)=۶\quad(**)$

$f(x)=x+\sqrt{x}\xrightarrow{(**)} a+\sqrt{a}=۶$

که با امتحان گزینه‌ها، تساوی اخیر فقط به ازای $a=۴$ برقرار است.

۱۱۳۹. گزینه‌ی ۱

از تساوی $۲f(g(-۱))=۶$ داریم: $f(g(-۱))=۳$، از طرفی $(-۱,۵)\in g$ لذا: $g(-۱)=۵$، بنابراین:

$f(g(-۱))=۳\xrightarrow{g(-۱)=۵} f(۵)=۳$

$\xrightarrow{f(۵)=۲a-b} ۲a-b=۳\quad (I)$

از تساوی $g(f(a))=۶$ و از آنجایی که $(a,۲)\in f$، بنابراین $f(a)=۲$ است، داریم:

$g(f(a))=۶\xrightarrow{f(a)=۲} g(۲)=۶$

$\xrightarrow{g(۲)=a+b} a+b=۶\quad (II)$

$\xrightarrow{(I),(II)}\begin{cases}۲a-b=۳\\a+b=۶\end{cases}\Rightarrow ۳a=۹\Rightarrow a=۳\ ,\ b=۳$

بنابراین $g(۶)$ برابر است با: $g(۶)=۳a+b=۳\times۳+۳=۱۲$

۱۱۴۰. گزینه‌ی ۴

با توجه به اینکه $(gof)(a)=g(f(a))=۱۵$، ابتدا باید ببینیم به ازای چه مقداری از x، تابع $g(x)$ برابر با ۱۵ می‌شود:

$g(x)=۲f(x+۲)-۳=۱۵\Rightarrow f(x+۲)=۹$

از آنجا که $(۶,۹)\in f$ است، پس داریم:

$f(x+۲)=۹\xrightarrow[f(۶)=۹]{(۶,۹)\in f} x+۲=۶\Rightarrow x=۴$

در نتیجه: $g(۴)=۱۵$، بنابراین خواهیم داشت:

$\begin{cases}g(۴)=۱۵\\g(f(a))=۱۵\end{cases}\Rightarrow f(a)=۴\xrightarrow[f(۳)=۴]{(۳,۴)\in f} a=۳$

۱۱۴۱. گزینه‌ی ۲

$f=\{(۲,۶),(۱,۵),(۵,۷),(۶,۹)\}\to D_f=\{۲,۱,۵,۶\}$

به ازای اعضای دامنه‌ی f، تابع fof را تشکیل می‌دهیم:

$fof(۲)=f(f(۲))=f(۶)=۹\to(۲,۹)$

$fof(۱)=f(f(۱))=f(۵)=۷\to(۱,۷)$

$fof(۵)=f(f(۵))=f(۷)$: وجود ندارد

$fof(۶)=f(f(۶))=f(۹)$: وجود ندارد

$\Rightarrow fof=\{(۲,۹),(۱,۷)\}\to$ مجموع اعضای برد $=۹+۷=۱۶$

۱۱۴۲. گزینه‌ی ۲

$f=\{(۱,-۱),(۵,۲),(-۱,۰/۵),(۴,۱/۵)\}$

$\to D_f=\{۱,۵,-۱,۴\}$

$g=\{(۳,۲),(۲,۳),(۴,-۳),(۱,۵)\}$

به ازای هر عضو دامنه‌ی تابع f، تابع $go(۲f)$ را تشکیل می‌دهیم:

$go(۲f)(۱)=g(۲f(۱))=g(۲\times(-۱))=g(-۲)$: وجود ندارد

$go(۲f)(۵)=g(۲f(۵))=g(۲\times۲)=g(۴)=-۳\to(۵,-۳)$

$go(۲f)(-۱)=g(۲f(-۱))=g(۲\times۰/۵)=g(۱)=۵\to(-۱,۵)$

$go(۲f)(۴)=g(۲f(۴))=g(۲\times۱/۵)=g(۳)=۲\to(۴,۲)$

$\Rightarrow go(۲f)=\{(۵,-۳),(-۱,۵),(۴,۲)\}$

بنابراین برد تابع $go(۲f)$ برابر با $\{۲,۵,-۳\}$ است.

۱۱۴۳. گزینه‌ی ۴

هر یک از توابع را تشکیل می‌دهیم. در هر کدام که مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابر باشند، تابع حاصل همانی است.

گزینه‌ی (۱):

$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$

$f^۲=\left\{(۱,۲^۲),(۲,۳^۲),(۳,۱^۲)\right\}$

$f^۲$ همانی نیست.

گزینه‌ی (۲):

$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$

$-f=\left\{(۱,-۲),(۲,-۳),(۳,-۱)\right\}$

$-f$ همانی نیست.

گزینه‌ی (۳):

$$f=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$$

$$f(f(1))=f(2)=3\rightarrow(1,3)\in fof$$

نیازی به محاسبه‌ی بقیه‌ی زوج‌های مرتب نیست زیرا مؤلفه‌های اول و دوم آن برابر نیستند.

گزینه‌ی (۴):

$$f=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$$

$$(fofof)(1)=f(f(f(1)))=f(f(2))=f(3)=1$$

$$\rightarrow(1,1)\in fofof$$

$$(fofof)(2)=f(f(f(2)))=f(f(3))=f(1)=2$$

$$\rightarrow(2,2)\in fofof$$

$$(fofof)(3)=f(f(f(3)))=f(f(1))=f(2)=3$$

$$\rightarrow(3,3)\in fofof$$

بنابراین:

$$fofof=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

که یک تابع همانی است.

۱۱۴۴. گزینه‌ی ۱

$$f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$$

$$g=\{(3,2),(2,1)\}$$

برای به دست آوردن تابع fog از مؤلفه‌های اول (ورودی‌های) تابع g آغاز می‌کنیم:

$$x=3\Rightarrow(fog)(3)=f(g(3))=f(2)=3$$

$$\Rightarrow(3,3)\in fog$$

$$x=2\Rightarrow(fog)(2)=f(g(2))=f(1)=2$$

$$\Rightarrow(2,2)\in fog$$

$$\Rightarrow fog=\{(3,3),(2,2)\}$$

برای به دست آوردن تابع gof از مؤلفه‌های اول (ورودی‌های) تابع f آغاز می‌کنیم:

$$x=1\Rightarrow(gof)(1)=g(f(1))=g(2)=1$$

$$\Rightarrow(1,1)\in gof$$

$$x=2\Rightarrow(gof)(2)=g(f(2))=g(3)=2$$

$$\Rightarrow(2,2)\in gof$$

$x=3\Rightarrow(gof)(3)=g(f(3))=g(4):$ تعریف نشده

$$\Rightarrow gof=\{(1,1),(2,2)\}$$

عضو مشترک دامنه‌های دو تابع fog و gof، $x=2$ است و داریم:

$$(fog+gof)(2)=(fog)(2)+(gof)(2)=2+2=4$$

$$\Rightarrow fog+gof=\{(2,4)\}$$

۱۱۴۵. گزینه‌ی ۴

با توجه به مجموعه‌های داده شده داریم: $D_f=\{1,0,4,-1\}$ و $D_g=\{2,-1,0,1\}$ پس $D_f\cap D_g=\{1,0,-1\}$.

لذا در مجموعه‌ی داده شده از گزینه‌های (۱) یا (۴) خواهیم داشت:

$$f+g=\{(1,1+2),(0,2+3),(-1,1+5)\}$$
$$=\{(1,3),(0,5),(-1,6)\}$$

$$g-f=\{(1,1-2),(0,3-2),(-1,5-1)\}$$
$$=\{(1,-1),(0,1),(-1,4)\}$$

۱۱۴۶. گزینه‌ی ۱

می‌توان نوشت:

$$(f+g)+(f-g)=2f=\{(1,6),(2,8),(3,2),(4,4)\}$$

$$(f+g)-(f-g)=2g=\{(1,4),(2,0),(3,2),(4,2)\}$$

لذا:

$$f=\{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$$

$$g=\{(1,2),(2,0),(3,1),(4,1)\}$$

اما این فقط ظاهر قضیه است، $f+g$ و $f-g$ روی اشتراک دامنه‌های f و g تعریف شده است یعنی f و g به جز زوج‌های مرتب مشخص شده شاید زوج‌های مرتب دیگری هم داشته باشند. یعنی f و g حداقل این ۴ زوج مرتب مشخص شده را دارند، در این حالت:

$$fog=\{(1,4),(3,3),(4,3)\}$$

بنابراین fog حداقل شامل ۳ زوج مرتب است، در نتیجه تعداد اعضای fog نمی‌تواند ۲ باشد.

۱۱۴۷. گزینه‌ی ۱

از ورودی‌های تابع f شروع می‌کنیم:

$$\begin{cases}(gof)(6)=g(f(6))=g(4)=3\times4=12\\(gof)(2)=g(f(2))=g(-5)\quad \text{وجود ندارد:}\\(gof)(3)=g(f(3))=g(9)=3\times9=27\end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{gof}=\{12,27\}$$

راهبرد حل تیپ (۳۲)

① برای دو تابع f و g با دامنه‌های D_f و D_g، دامنه‌ی تابع $(fog)(x)=f(g(x))$ برابر است با: $D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$

به عبارت دیگر، دامنه‌ی تابع fog زیرمجموعه‌ی دامنه‌ی تابع g است.

به عنوان مثال وقتی $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x-2}$، آنگاه $D_f=[0,+\infty)$ و $D_g=R-\{2\}$، پس دامنه‌ی fog برابر است با:

$$D_{fog}=\left\{x\neq2\,\middle|\,\frac{1}{x-2}\geq0\right\}=\{x\neq2\,|\,x>2\}$$

$$D_{fog}=(2,+\infty)$$

و دامنه‌ی gof عبارتست از:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$$
$$=\{x\geq0\,|\,\sqrt{x}\neq2\}=[0,+\infty)-\{4\}$$

دقت کنید که در حالت کلی دو تابع fog و gof با هم برابر نیستند و همچنین دامنه‌ی آنها.

② اگر دامنه‌ی تابع $f(x)$ بازه‌ی $[a,b]$ باشد، آنگاه دامنه‌ی تابع $f(kx)$ مجموعه جواب نامعادله‌ی $a\leq kx\leq b$ است.

به عنوان مثال اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[0,2]$ باشد، آنگاه دامنه‌ی تابع $y=f(-2x)$ برابر است با:

$$0\leq-2x\leq2\Rightarrow-1\leq x\leq0\Rightarrow D_y=[-1,0]$$

۱۱۴۸. گزینه‌ی ۳

$$f(x)=x^2+9\Rightarrow D_f=R$$

$$g(x)=\sqrt{x^2-9}\Rightarrow D_g:x^2-9\geq0\Rightarrow D_g:x^2\geq3^2$$

$$\Rightarrow D_g:|x|\geq3$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x^2-9})=(\sqrt{x^2-9})^2+9=x^2$$

$$D_{fog}=\left\{x\in D_g\,\middle|\,g(x)\in D_f\right\}$$

$$=\left\{|x|\geq3\,\middle|\,\underbrace{\sqrt{x^2-9}\in R}\right\}=\{|x|\geq3\}$$

با شرط $|x|\geq3$ عبارت $\sqrt{x^2-9}$ یک عدد حقیقی است.

۱۱۴۹. گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} D_f: ۱-x^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ \le ۱ \Rightarrow -۱ \le x \le ۱ \\ D_g: ۲x+۴ \ge ۰ \Rightarrow ۲x \ge -۴ \Rightarrow x \ge -۲ \end{cases}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{-۱ \le x \le ۱ \mid \underbrace{\sqrt{۱-x^۲} \ge -۲}_{\text{به‌ازای هر } x \in D_f \text{ برقرار است.}}\}$$

$$D_{gof} = \{x \mid -۱ \le x \le ۱\} = [-۱\,,۱]$$

۱۱۵۰. گزینه‌ی ۱

$$g(x) = \sqrt{۴-x^۲}$$

$$۴-x^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ \le ۴ \Rightarrow |x| \le ۲ \Rightarrow -۲ \le x \le ۲$$

$$\Rightarrow D_g = [-۲\,,۲]$$

$$f(x) = x + \frac{۱}{x}\,,\ x \ne ۰$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \ne ۰ \mid x + \frac{۱}{x} \in [-۲\,,۲]\}$$

بنابراین باید حدودی از x را بیابیم که نامعادله‌ی $-۲ \le x + \frac{۱}{x} \le ۲$ برقرار باشد. از طرفی می‌دانیم

$$\begin{cases} x + \frac{۱}{x} \ge ۲ & ,\ x > ۰ \\ x + \frac{۱}{x} \le -۲ & ,\ x < ۰ \end{cases}$$

، بنابراین فقط حالت تساوی نامعادله‌ی $-۲ \le x + \frac{۱}{x} \le ۲$ برقرار است که به ازای $x = ۱$ و $x = -۱$ برقرار خواهد شد، بنابراین:

$$\Rightarrow D_{gof} = \{۱\,, -۱\}$$

۱۱۵۱. گزینه‌ی ۴

راه حل اول:

$$f(x) = \sqrt{۲x - x^۲} \Rightarrow f(۳-x) = \sqrt{۲(۳-x) - (۳-x)^۲}$$

$$\Rightarrow f(۳-x) = \sqrt{-x^۲ + ۴x - ۳}$$

باید $-x^۲ + ۴x - ۳ \ge ۰$ باشد، پس: $x^۲ - ۴x + ۳ \le ۰ \Rightarrow ۱ \le x \le ۳$

یعنی دامنه‌ی تابع $f(۳-x)$، بازه‌ی $[۱,۳]$ است.

راه حل دوم: از آن‌جایی که در تابع f، حدود تغییرات x برابر $۰ \le x \le ۲$ است، پس: $۰ \le ۳ - x \le ۲ \Rightarrow -۳ \le -x \le -۱ \Rightarrow ۱ \le x \le ۳$

۱۱۵۲. گزینه‌ی ۳

$D_g: x \ne ۱$ و $D_f: x \ge ۳$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \{x \ne ۱ \mid \frac{x+۱}{x-۱} \ge ۳\} \quad (۱)$$

$$\frac{x+۱}{x-۱} \ge ۳ \Rightarrow \frac{x+۱}{x-۱} - ۳ \ge ۰ \Rightarrow \frac{x+۱-۳x+۳}{x-۱} \ge ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۲x+۴}{x-۱} \ge ۰ \Rightarrow ۱ < x \le ۲ \quad (۲)$$

$$(۱)\,,(۲) \Rightarrow D_{fog} = (۱\,,۲]$$

۱۱۵۳. گزینه‌ی ۲

راه حل اول: دامنه‌ی توابع f و g را می‌یابیم:

$$f(x) = \frac{۱+x^۲}{۱-x^۲} : D_f = R - \{\pm ۱\}$$

$$g(x) = \sqrt{x - x^۲} : x - x^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ - x \le ۰ \Rightarrow x(x-۱) \le ۰$$

$$\Rightarrow ۰ \le x \le ۱$$

با استفاده از تعریف دامنه‌ی ترکیب توابع، دامنه‌ی تابع gof را می‌یابیم:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in R - \{\pm ۱\} \mid ۰ \le \frac{۱+x^۲}{۱-x^۲} \le ۱\}$$

پس مجموعه جواب نامعادلات $۰ \le \frac{۱+x^۲}{۱-x^۲} \le ۱$ برابر دامنه‌ی تابع gof است. در نتیجه:

$$(*) \quad \frac{۱+x^۲}{۱-x^۲} \ge ۰ \xrightarrow{(۱+x^۲) \text{ همواره مثبت است}} ۱ - x^۲ > ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱$$

$$(**) \quad \frac{۱+x^۲}{۱-x^۲} \le ۱ \Rightarrow \frac{۱+x^۲}{۱-x^۲} - ۱ \le ۰ \Rightarrow \frac{۱+x^۲-۱+x^۲}{۱-x^۲} \le ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲x^۲}{۱-x^۲} \le ۰ \xrightarrow[\text{در } x=۰ \text{ مقدار کسر صفر است}]{۲x^۲ \ge ۰} ۱ - x^۲ < ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ > ۱ \Rightarrow x > ۱ \text{ یا } x < -۱$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = (x < -۱ \text{ یا } x > ۱) \cup \{۰\}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک } (*)\,,(**)} \{۰\}$$

در نتیجه دامنه‌ی تابع gof، به صورت $\{۰\}$ است.

راه حل دوم: مقدار تابع gof را در $x = \frac{۱}{۲}$ محاسبه می‌کنیم:

$$g(f(\frac{۱}{۲})) = g\left(\frac{۱+\frac{۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۴}}\right) = g(\frac{۵}{۳}) = \sqrt{\frac{۵}{۳} - \frac{۲۵}{۹}} \quad \text{تعریف نشده:}$$

پس $x = \frac{۱}{۲}$ در دامنه‌ی تابع قرار ندارد. در نتیجه با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی «۲» صحیح است.

۱۱۵۴. گزینه‌ی ۴

$$D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

$$\Rightarrow D_{fof} = \{x \ne ۱ \mid f(x) \ne ۱\}$$

برای حل $f(x) \ne ۱$، ابتدا معادله‌ی $f(x) = ۱$ را حل می‌کنیم و x را مخالف جواب‌های به دست آمده قرار می‌دهیم.

$$x > ۱ : f(x) = ۱$$

$$x < ۱ : f(x) = x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \xrightarrow{x<۱} x = -۱$$

پس مجموعه جواب معادله‌ی $f(x) = ۱$ مجموعه‌ی $\{-۱\} \cup (۱,+\infty)$ است. لذا داریم:

$$D_{fof} = \{x \ne ۱ \mid x \ne -۱\,, x < ۱\} = (-\infty,۱) - \{-۱\}$$

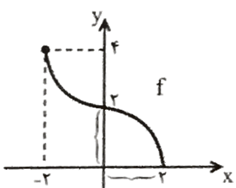
۱۱۵۵. گزینه‌ی ۳

با توجه به نمودار $D_f = [-۲\,,۲]$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \in [-۲\,,۲] \mid f(x) \in [-۲\,,۲]\}$$

با توجه به نمودار، برای آنکه $-۲ \le f(x) \le ۲$ باشد باید $۰ \le x \le ۲$ باشد.



در نتیجه:

$$D_{fof} = \{x \in [-۲\,,۲] \mid ۰ \le x \le ۲\} = [۰\,,۲]$$

پس دامنه‌ی تابع fof شامل سه عدد صحیح صفر، ۱ و ۲ است.

۱۱۵۶. گزینه‌ی ۴

با توجه به نمودار توابع، داریم:

$$D_f=[-1,5] \text{ و } D_g=(1,3]$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$
$$=\{x\in[-1,5] \mid f(x)\in(1,3]\}$$

با توجه به نمودار تابع f، به ازای $x\in(0,4)$ مقادیر تابع f در بازه‌ی $[1,3)$ قرار دارند، بنابراین:

$$D_{gof}=\{x\in[-1,5] \mid x\in(0,4)\}=(0,4)$$

۱۱۵۷. گزینه‌ی ۲

تابع را تشکیل داده و برد را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$\Rightarrow f(f(x))=f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\frac{-\frac{2}{x+1}}{\frac{2x}{x+1}}$$

پس دامنه‌ی تابع $y=f(f(x))$ برابر $R-\{0,-1\}$ است و در نتیجه با ساده کردن تابع حاصل خواهیم داشت:

$$y=f(f(x))=-\frac{1}{x}\xrightarrow{x\neq 0,-1}R_{fof}=R-\{0,1\}$$

۱۱۵۸. گزینه‌ی ۴

$$f(g(x))=4-(g(x))^2$$

دامنه‌ی تابع g بازه‌ی $[-2,2]$ است، لذا:

$$-2\le x\le 2\Rightarrow 0\le x^2\le 4\Rightarrow -4\le -x^2\le 0$$
$$\Rightarrow 0\le 4-x^2\le 4\Rightarrow 0\le\sqrt{4-x^2}\le 2\Rightarrow 0\le g(x)\le 2$$

باید حدود تغییرات تابع f را در این بازه بیابیم:

$$\Rightarrow 0\le g^2(x)\le 4\Rightarrow -4\le -g^2(x)\le 0$$
$$\Rightarrow 0\le 4-g^2(x)\le 4$$

یعنی $R_{fog}=[0,4]$.

۱۱۵۹. گزینه‌ی ۱

با تعیین ضابطه‌ی gof خواهیم داشت:

$$y=(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\frac{2-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

حال برد این تابع را می‌یابیم، برای این منظور با طرفین وسطین کردن داریم:

$$y=\frac{2-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\Rightarrow y+y\sqrt{x}=2-\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}(1+y)=2-y$$
$$\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{2-y}{1+y}$$

اما $\sqrt{x}\ge 0$ است، پس $\frac{2-y}{1+y}\ge 0$، با تعیین علامت و حل این نامعادله داریم:

$$\frac{2-y}{1+y}\ge 0\Rightarrow -1<y\le 2\Rightarrow R_y=(-1,2]$$

۱۱۶۰. گزینه‌ی ۱

با تشکیل تابع gof داریم:

$$g(x-[x])=\frac{1}{x-[x]}-1$$

می‌دانیم $0\le x-[x]<1$، از طرفی $x-[x]$ برابر صفر نمی‌تواند باشد زیرا مخرج کسر تعریف نمی‌شود، لذا:

$$0<x-[x]<1\Rightarrow\frac{1}{x-[x]}>1\Rightarrow\frac{1}{x-[x]}-1>0$$
$$\Rightarrow(gof)(x)>0\Rightarrow R_{gof}=(0,+\infty)$$

راهبرد حل تیپ (۳۳)

① اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد و f^{-1} وارون آن، آنگاه ترکیب هر تابع و وارون آن تابع همانی را می‌دهد، یعنی:

$$(1)\ (fof^{-1})(x)=x\ ,\ x\in D_{f^{-1}}$$
$$(2)\ (f^{-1}of)(x)=x\ ,\ x\in D_f$$

در اینجا توجه کنید که کدام تابع اول وارد می‌شود. دامنه‌ی تابع مرکب با دامنه‌ی آن تابع برابر است.

② اگر f و g دو تابع وارون‌پذیر و $(fog)(x)=x$ باشد، آنگاه f و g وارون یکدیگرند زیرا ترکیب آنها تابع همانی را داده است.

۱۱۶۱. گزینه‌ی ۲

اگر f^{-1} وارون تابع f باشد، همواره داریم:

$$\begin{cases}(fof^{-1})(x)=x\ ,\ x\in D_{f^{-1}}\\(f^{-1}of)(x)=x\ ,\ x\in D_f\end{cases}$$

بنابراین:
$$(fof^{-1})(5)+(f^{-1}of)(4)=5+4=9$$

۱۱۶۲. گزینه‌ی ۱

از آنجا که $(fof^{-1})(x)=x$ و $(f^{-1}of)(x)=x$ است، تساوی این دو تابع به ازای مقادیر مشترک دامنه‌هایشان، همواره برقرار است، بنابراین:

$$f=\{(1,4),(2,3),(3,5)\}$$
$$D_f=\{1,2,3\}\qquad D_{f^{-1}}=R_f=\{4,3,5\}$$
$$\Rightarrow D_f\cap D_{f^{-1}}=\{3\}$$

بنابراین به ازای $a=3$ تساوی $(f^{-1}of)(a)=(fof^{-1})(a)$ برقرار است.

۱۱۶۳. گزینه‌ی ۳

می‌دانیم تابع ماشینی است با ورودی x و خروجی y یعنی:

$$x\to\boxed{f}\to y\Rightarrow y=f(x)$$

در این سؤال: $g(f(x))=x$

ترکیب هر تابع با تابع معکوس آن تابع همانی را می‌دهد، پس g معکوس f است. بنابراین $g(x)=f^{-1}(x)$، در نتیجه $g(0)=f^{-1}(0)$.

اگر $f^{-1}(0)=a$ آنگاه $f(a)=0$، پس:

$$f(a)=0\Rightarrow 2a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{2}\Rightarrow g(0)=\frac{1}{2}$$

۱۱۶۴. گزینه‌ی ۱

می‌دانیم ترکیب تابع با وارونش، تابع همانی را می‌دهد و از طرفی طبق فرض $f(g(x))=x$، بنابراین f و g وارون یکدیگرند، پس: $f(x)=g^{-1}(x)$ است، پس وارون تابع g را می‌یابیم.

$$y=-\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{x}=-y\xrightarrow{y<0}x=(-y)^2=y^2$$
$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y}y=x^2\ ,\ x<0\Rightarrow g^{-1}(x)=x^2\ ,\ x<0$$

بنابراین $f(x)=x^2$ ، $x<0$ و داریم:

$$f(-f(-3))=f(-(-3)^2)=f(-9)=(-9)^2=81$$

۱۱۶۵. گزینه‌ی ۲

چون g معکوس f است، پس باید حدودی از x را بیابیم که تساوی روبه‌رو برقرار باشد: $f(f^{-۱}(x))=x$

این تساوی به ازای دامنه‌ی تابع $f^{-۱}$ برقرار است. برد تابع f را به‌ازای $x\le ۳$ می‌یابیم:

$$f(x)=(x-۳)^۲-۹ \xRightarrow{x\le ۳} f(x)\ge -۹$$

بنابراین $D_{f^{-۱}}=R_f=[-۹,+\infty)$، پس تساوی $f(g(x))=x$ به ازای $x\ge -۹$ برقرار است.

۱۱۶۶. گزینه‌ی ۲

از آنجا که همواره داریم:

$$(f^{-۱}of)(x)=x \ ، \ x\in D_f$$

کافی است دامنه‌ی تابع f را بیابیم.

$$f(x)=-\sqrt{x-۲}$$

$$x-۲\ge ۰\Rightarrow x\ge ۲\Rightarrow D_f=[۲,+\infty)$$

بنابراین: $x\ge ۲$ ، $(f^{-۱}of)(x)=x$؛ پس نمودار گزینه‌ی (۲) درست است.

۱۱۶۷. گزینه‌ی ۳

تساوی $fof^{-۱}=f^{-۱}of$ در صورتی برقرار است که f وارون‌پذیر باشد و دامنه و برد f یکسان باشد که تنها گزینه‌ی «۳» این ویژگی را دارد.

۱۱۶۸. گزینه‌ی ۱

برای ترکیب دو تابع f و $f^{-۱}$ داریم:

$$\begin{cases}(fof^{-۱})(x)=x \ , \ x\in D_{f^{-۱}}\\ (f^{-۱}of)(x)=x \ , \ x\in D_f\end{cases}$$

بنابراین دامنه‌ی تابع $y=(fof^{-۱})(x)+(f^{-۱}of)(x)$ برابر با $D_f\cap D_{f^{-۱}}$ است. از طرفی $D_{f^{-۱}}=R_f$، پس کافی است اشتراک دامنه و برد تابع f را بیابیم: $f(x)=۱-\sqrt{x+۱}$

دامنه: $x+۱\ge ۰\Rightarrow x\ge -۱\Rightarrow D_f=[-۱,+\infty)$

برد: $\sqrt{x+۱}\ge ۰\Rightarrow -\sqrt{x+۱}\le ۰\Rightarrow ۱-\sqrt{x+۱}\le ۱$

$$\Rightarrow R_f=D_{f^{-۱}}=(-\infty,۱]$$

لذا: $D_f\cap D_{f^{-۱}}=[-۱,+\infty)\cap(-\infty,۱]=[-۱,۱]$

راهبرد حل تیپ (۳۴)

① در رابطه‌ی $f^{-۱}(g(x))=k$ ، با توجه به ویژگی تابع وارون نتیجه می‌شود:

$$f^{-۱}(g(x))=k \Leftrightarrow g(x)=f(k)$$

به عبارت دیگر از طرفین رابطه f می‌گیریم.

② اگر f و g توابعی وارون‌پذیر باشند، آنگاه:

(۱) $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$ (۲) $(gof)^{-۱}=f^{-۱}og^{-۱}$

(۳) $(fog^{-۱})^{-۱}=gof^{-۱}$

اینطوری یاد بگیرید، هر کدام را وارون کرده و سپس جایشان را عوض می‌کنیم.

۱۱۶۹. گزینه‌ی ۳

$$(fogof^{-۱})(۳)=f(g(f^{-۱}(۳)))$$

با فرض $f^{-۱}(۳)=\alpha$، داریم: $f(\alpha)=۳$، از آنجا که $(۲,۳)\in f$، بنابراین: $\alpha=۲$، پس: $f^{-۱}(۳)=۲$، لذا خواهیم داشت:

$$f(g(f^{-۱}(۳)))=f(g(۲))\xrightarrow{(۲,-۴)\in g} f(-۴)=۱$$

۱۱۷۰. گزینه‌ی ۴

$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۰,۳),(۴,-۱)\}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۳,۰),(-۱,۴)\}$$

$$D_{f^{-۱}}=\{۲,۵,۳,-۱\}$$

$$g=\{(۲,۳),(-۱,۴),(۴,۱),(۳,۰)\}$$

$g(f^{-۱}(۲))=g(۱)$: تشکیل نمی‌شود.

$g(f^{-۱}(۵))=g(۲)=۳$

$g(f^{-۱}(۳))=g(۰)$: تشکیل نمی‌شود.

$g(f^{-۱}(-۱))=g(۴)=۱$

$$gof^{-۱}=\{(۵,۳),(-۱,۱)\}$$

۱۱۷۱. گزینه‌ی ۴

ابتدا توابع $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را می‌یابیم:

$$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵),(۳,۴)\}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴),(۴,۳)\}$$

$$g=\{(۲,۱),(۳,۲),(۵,۴)\}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}=\{(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵)\}$$

برای محاسبه‌ی تابع $g^{-۱}of^{-۱}$ از دامنه‌ی تابع $f^{-۱}$ شروع می‌کنیم.

$$\begin{cases}x=۲: g^{-۱}(f^{-۱}(۲))=g^{-۱}(۱)=۲\Rightarrow (۲,۲)\in g^{-۱}of^{-۱}\\ x=۳: g^{-۱}(f^{-۱}(۳))=g^{-۱}(۲)=۳\Rightarrow (۳,۳)\in g^{-۱}of^{-۱}\\ x=۴: g^{-۱}(f^{-۱}(۴))=g^{-۱}(۳) \quad \text{تشکیل نمی‌شود:}\\ x=۵: g^{-۱}(f^{-۱}(۵))=g^{-۱}(۴)=۵\Rightarrow (۵,۵)\in g^{-۱}of^{-۱}\end{cases}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}of^{-۱}=\{(۲,۲),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

۱۱۷۲. گزینه‌ی ۴

از آنجا که $g^{-۱}of^{-۱}=(fog)^{-۱}$ است، ابتدا fog را تشکیل داده و سپس وارون آن را به دست می‌آوریم. برای تشکیل fog از مؤلفه‌های اول تابع g شروع می‌کنیم:

$$f=\{(۰,-۱),(۲,\tfrac{۱}{۲}),(-۳,\sqrt{۲}),(۱,۵)\}$$

$$g=\{(-۱,-۳),(۵,۲),(\tfrac{۱}{۲},۰),(۴,۶)\}$$

$$\begin{cases}(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(-۳)=\sqrt{۲}\\ \Rightarrow (-۱,\sqrt{۲})\in fog\\ (fog)(۵)=f(g(۵))=f(۲)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow (۵,\frac{۱}{۲})\in fog\\ (fog)(\frac{۱}{۲})=f(g(\frac{۱}{۲}))=f(۰)=-۱\Rightarrow (\frac{۱}{۲},-۱)\in fog\\ (fog)(۴)=f(g(۴))=f(۶): \quad \text{وجود ندارد.}\end{cases}$$

$$\Rightarrow fog=\{(-۱,\sqrt{۲}),(۵,\tfrac{۱}{۲}),(\tfrac{۱}{۲},-۱)\}$$

$$\Rightarrow (fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}=\{(\sqrt{۲},-۱),(\tfrac{۱}{۲},۵),(-۱,\tfrac{۱}{۲})\}$$

بنابراین $g^{-۱}of^{-۱}$ به ازای مقادیر $\sqrt{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$ و -۱ تعریف شده است و به ازای ۵ تعریف نشده است.

۱۱۷۳. گزینه‌ی ۲

$$(۶,۳)\in f \Rightarrow (۳,۶)\in f^{-۱} \Rightarrow f^{-۱}(۳)=۶$$

از طرفی $f^{-۱}(g(۲a))=۶$، پس:

$$\begin{cases} f^{-۱}(۳)=۶ \\ f^{-۱}(g(۲a))=۶ \end{cases} \Rightarrow g(۲a)=۳$$

$$\Rightarrow \frac{۲a}{۲a-۱}=۳ \Rightarrow ۲a=۶a-۳ \Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۱۱۷۴. گزینه‌ی ۲

$$f(g^{-۱}(a))=۱ \Rightarrow f^{-۱}(۱)=g^{-۱}(a) \quad (*)$$

با توجه به ضابطه‌ی $f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۱-۲x}$، مقدار $f^{-۱}(۱)$ برابر است با:

$$f^{-۱}(۱)=\frac{۱+۱}{۱-۲(۱)}=-۲$$

$$\xrightarrow{(*)} g^{-۱}(a)=-۲ \Rightarrow g(-۲)=a$$

با توجه به نمودار تابع g، داریم: $g(-۲)=-۱$، بنابراین $a=-۱$ است.

۱۱۷۵. گزینه‌ی ۲

$$f=\{(۱,۳),(۲,۴),(۴,۵),(۳,۱),(۶,۶)\}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}=\{(۳,۱),(۴,۲),(۵,۴),(۱,۳),(۶,۶)\}$$

$$f^{-۱}of^{-۱}=\{(۳,۳),(۵,۲),(۱,۱),(۶,۶)\}$$

$$\Rightarrow (f^{-۱}of^{-۱})+f=\{(۱,۴),(۳,۴),(۶,۱۲)\}$$

تابع فوق شامل زوج مرتب $(۲,۵)$ نیست.

۱۱۷۶. گزینه‌ی ۱

$$g^{-۱}(f(a))=۳ \xrightarrow{\text{از طرفین } g \text{ می‌گیریم}} f(a)=g(۳)=-۲$$

$$\rightarrow f(a)=-۲$$

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & ; \quad x\ge ۰ \\ -\sqrt{-x} & ; \quad x<۰ \end{cases} \rightarrow f(a)=\begin{cases} \sqrt{a} & ; \quad a\ge ۰ \\ -\sqrt{-a} & ; \quad a<۰ \end{cases}$$

$$a\ge ۰ \rightarrow \sqrt{a}\ne -۲$$

$$a<۰ \rightarrow -\sqrt{-a}=-۲ \rightarrow a=-۴$$

۱۱۷۷. گزینه‌ی ۳

$$f(x)=۲x+۱ \quad \text{و} \quad g(x)=x-۱$$

ابتدا وارون تابع g را به دست می‌آوریم. برای این کار، کافی است x را برحسب y حساب کرده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$y=x-۱ \Rightarrow x=y+۱ \Rightarrow g^{-۱}(x)=x+۱$$

حال برای یافتن ضابطه‌ی $fog^{-۱}$ کافی است تابع f را با تابع $g^{-۱}$ ترکیب کنیم:

$$(fog^{-۱})(x)=f(g^{-۱}(x))=۲g^{-۱}(x)+۱$$

$$(fog^{-۱})(x)=۲(x+۱)+۱=۲x+۳$$

۱۱۷۸. گزینه‌ی ۱

ابتدا دامنه‌ی تابع fog و سپس ضابطه‌ی آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^۲+۱ \Rightarrow D_f=R$$

$$g(x)=\sqrt{x-۱} : x-۱\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۱ , D_g=\{x \mid x\ge ۱\}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\ge ۱ \mid \sqrt{x-۱}\in R\}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=\{x \mid x\ge ۱\}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x-۱})^۲+۱=x-۱+۱=x$$

بنابراین تابع fog یک تابع همانی است و دامنه و برد آن یکسان است، پس:

$$R_{fog}=\{y \mid y\ge ۱\}$$

می‌دانیم که تابع $y=x$ تابعی است که وارون آن با خود آن برابر است، بنابراین:

$$(fog)(x)=x \Rightarrow (fog)^{-۱}(x)=x$$

$$D_{(fog)^{-۱}}=R_{(fog)}=\{x \mid x\ge ۱\}$$

۱۱۷۹. گزینه‌ی ۱

از آنجا که $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$، ابتدا fog را تشکیل داده و سپس معکوس آن را محاسبه می‌کنیم:

$$(fog)(x)=۱+\sqrt{x^۲}=۱+|x| \xlongequal{x>۰} ۱+x$$

معکوس $y=x+۱$ برابر است با $y=x-۱$ پس:

$$(g^{-۱}of^{-۱})(x)=x-۱$$

۱۱۸۰. گزینه‌ی ۲

$$f^{-۱}(f(x))=x \Rightarrow f^{-۱}(\underbrace{f(g(x))}_{۲x-۱})=\underbrace{g(x)}_{x^۳+۱}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۲x-۱)=x^۳+۱$$

برای محاسبه‌ی $f^{-۱}(۲)$ داریم:

$$۲x-۱=۲ \Rightarrow ۲x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(۲)=(\frac{۳}{۲})^۳+۱=\frac{۲۷}{۸}+۱=\frac{۳۵}{۸}$$

راهبرد حل تیپ (۳۵)

الف) نمودار تابع $f(x+k)$ با انتقال نمودار تابع $f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید که اگر k مثبت باشد، k واحد به سمت چپ و اگر k منفی باشد، k واحد به سمت راست انتقال می‌یابد.
نمودار تابع $f(x)+k$ با انتقال نمودار تابع $f(x)$ در راستای محور yها به دست می‌آید که اگر k مثبت باشد، k واحد به سمت بالا و اگر k منفی باشد، k واحد به سمت پایین انتقال می‌یابد.

ب) اگر نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ روی تابع $y=f(x)$ باشد، آنگاه نقطه‌ی $A'(x_۰+k,y_۰+c)$ روی تابع $y=f(x-k)+c$ است.

• نکته‌ی ۱: اگر دامنه‌ی تابع $f(x)$ بازه‌ی $[a,b]$ و برد آن بازه‌ی $[m,n]$ باشد، تأثیر انتقال‌های افقی و عمودی تابع بر روی دامنه و برد به صورت زیر است:

برد	دامنه	انتقال تابع $f(x)$
تأثیری ندارد.	$[a-k,b-k]$	$f(x+k)$
$[m+k,n+k]$	تأثیری ندارد.	$f(x)+k$

• نکته‌ی ۲: اگر دو تابع از یک خانواده باشند، مثلاً هر دو تابع درجه‌ی دوم یا هر دو تابع گویا باشند، آنگاه می‌توان با انتقال‌های افقی و عمودی نمودار یکی از آنها به نمودار دیگری رسید. برای این منظور باید ضابطه‌ی هر دو تابع را به شکل استاندارد تبدیل کنیم. به شکل استاندارد تابع‌های زیر توجه کنید:

تابع درجه‌ی دوم : $y=(x-h)^۲+k$

تابع گویا : $y=\frac{۱}{x-h}+k$

۱۱۸۱. گزینه‌ی ۲

در تبدیل نقاط تابع $f(x)$ به نقاط تابع $f(x+۱)-۳$، به طول هر نقطه -۱ واحد و به عرض هر نقطه -۳ واحد اضافه می‌شود:

$$A(x_۰,y_۰) \xrightarrow{f(x+۱)-۳} A'(x_۰-۱,y_۰-۳)$$

۱۱۸۲. گزینه‌ی ۳

اگر تابع $y=f(x+1)-2$ را ابتدا دو واحد به راست و سپس ۴ واحد به بالا منتقل کنیم، تابع $y=f(x-1)+2$ حاصل می‌شود. پس به طول هر نقطه ۲ واحد و به عرض هر نقطه ۴ واحد اضافه می‌شود:

$$A(1,-8)\to A'(1+2,-8+4)=(3,-4)$$

فاصله‌ی نقطه‌ی A' از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA'=\sqrt{x_{A'}^2+y_{A'}^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

۱۱۸۳. گزینه‌ی ۱

با انتقال تابع $k(x)=f(x-1)+1$ ۲ واحد به چپ و دو واحد به پایین، تابع $g(x)=f(x+1)-1$ ساخته می‌شود.

$$g(x)=k(x+2)-2$$

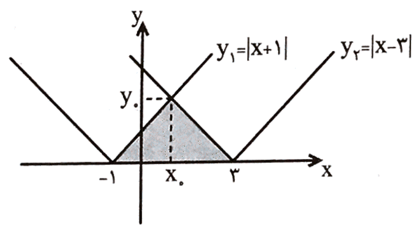
$$\begin{cases} D_k=[-1,1]\xrightarrow{-2} D_g=[-1-2,1-2]=[-3,-1] \\ R_k=[0,4]\xrightarrow{-2} R_g=[0-2,4-2]=[-2,2] \end{cases}$$

$$D_g\cap R_g=[-3,-1]\cap[-2,2]=[-2,-1]\to$$

شامل دو عدد صحیح است.

۱۱۸۴. گزینه‌ی ۲

نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



برای محاسبه‌ی ناحیه‌ی سایه زده شده، باید نقطه‌ی تلاقی دو نمودار را به دست آوریم.

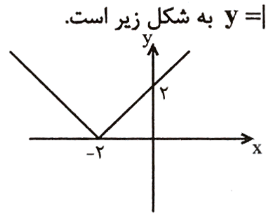
$$y_1=y_2\Rightarrow|x+1|=|x-3|\Rightarrow x+1=\pm(x-3)$$

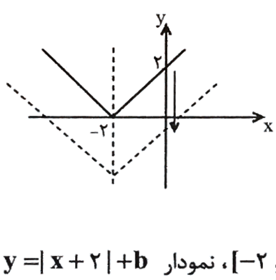
$$\Rightarrow\begin{cases} x+1=x-3: \text{جواب ندارد.} \\ x+1=-x+3\Rightarrow x_0=1\to y_0=2 \end{cases}$$

مساحت مثلث برابر است با: $\frac{4\times2}{2}=4$.

۱۱۸۵. گزینه‌ی ۱

نمودار تابع $y=|x+2|$ به شکل زیر است.





نمودار $y=|x+2|+b$ با انتقال نمودار $y=|x+2|$ در راستای محور yها به بالا یا پایین به‌دست می‌آید. اگر b عددی منفی باشد، نمودار به پایین انتقال یافته و زمانی از ناحیه‌ی چهارم عبور می‌کند که $b<-2$ شود.

پس به ازای $b\ge-2$ یا بازه‌ی $[-2,+\infty)$، نمودار $y=|x+2|+b$ از ناحیه‌ی چهارم عبور نمی‌کند.

۱۱۸۶. گزینه‌ی ۳

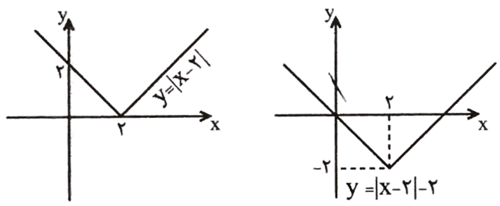
می‌دانیم $\sqrt{a^2}=|a|$، پس:

$$\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$$

بنابراین تابع به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$y=|x-2|-2$$

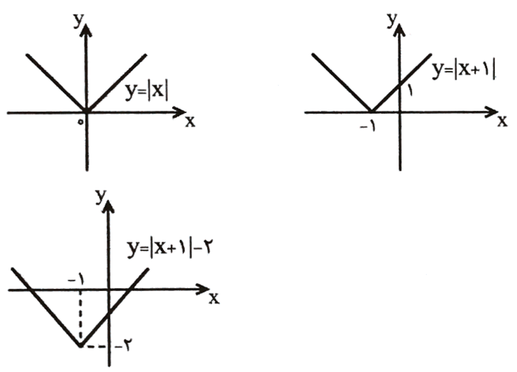
برای رسم آن کافی است ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را ۲ واحد به راست و سپس ۲ واحد به پایین انتقال دهیم.



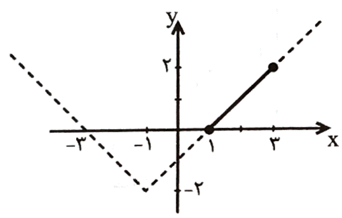
بنابراین نمودار از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند.

۱۱۸۷. گزینه‌ی ۱

با استفاده از انتقال نمودار تابع $y=|x|$، نمودار تابع $f(x)=|x+1|-2$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به دامنه‌ی $D_f=[1,3]$ داریم:



$$f(1)=0$$
$$f(3)=2$$

$\Rightarrow$ برد تابع: $R_f=[0,2]$

۱۱۸۸. گزینه‌ی ۳

راه حل اول: نمودار تابع $f(x)=|x|$ دو واحد به راست و یک واحد به پایین منتقل شده و نمودار تابع g ساخته شده است. بنابراین ضابطه‌ی تابع g به صورت روبه‌رو است:

$$g(x)=|x-2|-1$$

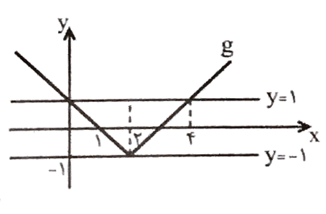
برای حل نامعادله‌ی $g^2(x)\le1$ داریم:

$$g^2(x)\le1\xrightarrow{\text{جذر}}|g(x)|\le1\Rightarrow-1\le g(x)\le1$$

$$\Rightarrow-1\le|x-2|-1\le1\xrightarrow{+1}0\le|x-2|\le2$$

$$\Rightarrow|x-2|\le2\Rightarrow-2\le x-2\le2\xrightarrow{+2}0\le x\le4$$

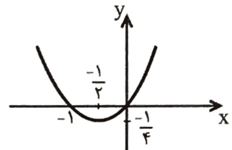
راه حل دوم: با توجه به اینکه $-1\le g(x)\le1$ کافی است بازه‌ای را بیابیم که $g(x)$ بین دو خط $y=1$ و $y=-1$ قرار دارد. با توجه به نمودار داریم:



$$\Rightarrow x\in[0,4]$$

۱۱۸۹. گزینه‌ی ۳

نمودار تابع $f(x)=x^2+x=x(x+1)$ به صورت زیر است.



اگر نمودار این تابع بیشتر از یک واحد به راست منتقل شود، آنگاه در دو نقطه با طول مثبت محور x ها را قطع خواهد کرد.

تابع گزینه‌ی (۳)، $f(x-2)$ با انتقال ۲ واحد به راست تابع f به دست می‌آید، بنابراین نمودار $f(x-2)$ محور x ها را در دو نقطه با طول مثبت قطع خواهد کرد.

۱۱۹۰. گزینه‌ی ۳

ابتدا ضابطه‌ی دو تابع را به فرم استاندارد $y=(x-h)^2+k$ تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=x^2-6x=x^2-6x+9-9=(x-3)^2-9$$

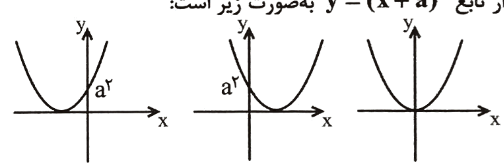
$$g(x)=x^2+2x=x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1$$

بنابراین با انتقال نمودار تابع $f(x)=(x-3)^2-9$، ۴ واحد به چپ و ۸ واحد به بالا، نمودار تابع $g(x)=(x+1)^2-1$ حاصل می‌شود. بنابراین به طول نقاط تابع f، ۴- واحد و به عرض نقاط تابع f، ۸ واحد اضافه می‌شود و نقاط تابع g حاصل می‌شود. بنابراین نقطه به طول ۵ روی تابع f که عرض آن برابر با $f(5)=5^2-6\times 5=-5$ است، به نقطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$(5,-5)\to(5-4,-5+8)=(1,3)$$

۱۱۹۱. گزینه‌ی ۳

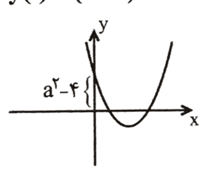
نمودار تابع $y=(x+a)^2$ به‌صورت زیر است:



$a>0$ $\quad$ $a<0$ $\quad$ $a=0$

بدیهی است اگر $a\ge 0$ باشد، آنگاه نمودار تابع $y=(x+a)^2-4$ همواره از ناحیه‌ی سوم عبور می‌کند؛ پس $a<0$. اما عرض از مبدأ این تابع برابر است با:

$$y(0)=(0+a)^2-4=a^2-4$$



برای آنکه نمودار با شرط $a<0$ از ناحیه‌ی سوم عبور نکند باید عرض از مبدأ آن نامنفی باشد.

پس $a^2-4\ge 0$، در نتیجه $a\ge 2$ یا $a\le -2$، بنابراین:

$$\begin{cases} a<0 \\ a\ge 2 \text{ یا } a\le -2 \end{cases} \xrightarrow{\ \cap\ } a\le -2$$

۱۱۹۲. گزینه‌ی ۴

ضابطه‌ی هر دو تابع را به شکل مربع کامل $y=(x-h)^2+k$ تبدیل می‌کنیم.

$$(1)\quad y=x^2-\frac{1}{2}x+2=(x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}+2=(x-\frac{1}{4})^2+\frac{31}{16}$$

$$(2)\quad y=x^2+\frac{1}{2}x+2=(x+\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}+2=(x+\frac{1}{4})^2+\frac{31}{16}$$

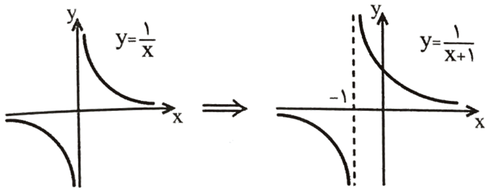
عرض رأس هر دو سهمی برابر است و طول رأس سهمی (۱) برابر با $x=\frac{1}{4}$ و طول رأس سهمی (۲) برابر با $x=\frac{-1}{4}$ است، پس رأس نمودار (۱)، سمت راست رأس نمودار (۲) است.

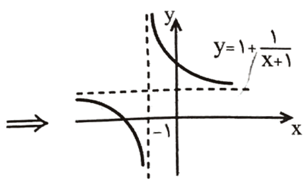
۱۱۹۳. گزینه‌ی ۴

ابتدا کسر را تفکیک می‌کنیم:

$$y=\frac{(x+1)+1}{x+1}=1+\frac{1}{x+1}$$

برای رسم این تابع کافی است نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را ابتدا یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا انتقال دهیم.



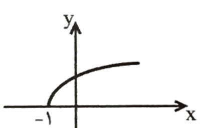


دیده می‌شود که نمودار تابع $y=\frac{x+2}{x+1}$ از ناحیه‌ی چهارم عبور نمی‌کند.

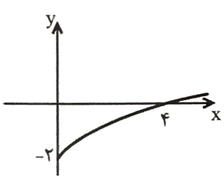
۱۱۹۴. گزینه‌ی ۳

نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم.

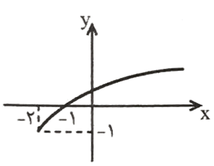
گزینه‌ی (۱): نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ انتقال داده تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+1}$ حاصل شود.



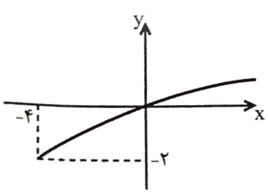
گزینه‌ی (۲): نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به پایین انتقال داده تا نمودار تابع $y=\sqrt{x}-2$ حاصل شود.



گزینه‌ی (۳): نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ابتدا دو واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال داده تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+2}-1$ حاصل شود.



گزینه‌ی (۴): نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ابتدا ۴ واحد به چپ و سپس دو واحد به پایین انتقال داده تا نمودار تابع $y=\sqrt{x+4}-2$ حاصل شود.



توجه کنید که نمودار از نقطه‌ی $(0,0)$ می‌گذرد.

بنابراین فقط تابع گزینه‌ی (۳) از سه ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور می‌کند.

۱۱۹۵. گزینه‌ی ۱

برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ کافی است ابتدا نمودار تابع $g(x)=-1+\sqrt{x+1}$ را ۳ واحد به راست انتقال دهیم تا نمودار تابع $y_1=-1+\sqrt{x-2}$ حاصل شود، سپس نمودار تابع y_1 را یک واحد به بالا انتقال دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x-2}$ به دست آید.

۱۱۹۶. **گزینه‌ی ۳**

اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y_۱$ حاصل می‌شود، بنابراین:

$$y_۱=\sqrt{x-۱}$$

اگر نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع $y_۲$ حاصل می‌شود.

$$y_۲=\sqrt{x}+۲$$

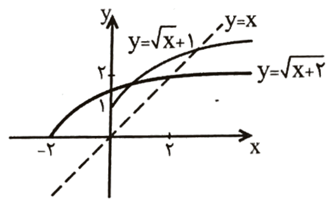
حال مقدار $y_۲-y_۱$ را به ازای $x_۰=۵$ می‌یابیم:

$$y_۲-y_۱=\sqrt{x}+۲-\sqrt{x-۱}$$

$$\xrightarrow{x_۰=۵} y_۲-y_۱=(\sqrt{۵}+۲)-(\sqrt{۵-۱})=\sqrt{۵}$$

۱۱۹۷. **گزینه‌ی ۲**

نمودار دو تابع $f(x)+۱$ و $f(x+۲)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و محل تقاطع آنها را می‌یابیم. نمودار تابع $f(x)+۱$ را با انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ یک واحد به بالا و نمودار تابع $f(x+۲)$ را با انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دو واحد به چپ رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود دو نمودار بالای نیمساز ناحیه‌ی اول یکدیگر را قطع می‌کنند. با حل معادله‌ی $f(x+۲)=f(x)+۱$ نیز می‌توان محل تقاطع را یافت.

$$\sqrt{x+۲}=\sqrt{x}+۱\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x+۲=x+۱+۲\sqrt{x}$$

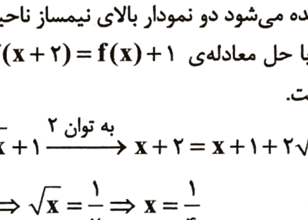
$$\Rightarrow ۲\sqrt{x}=۱\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

$$y=\sqrt{x}+۱=\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین محل تقاطع نقطه‌ی $(\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۲})$ است که بالای خط $y=x$ قرار دارد.

۱۱۹۸. **گزینه‌ی ۴**

راه حل اول: از رسم نمودار استفاده می‌کنیم، برای رسم تابع ضابطه‌ی بالا یعنی $y_۱=\sqrt{x}-۱$ نمودار $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم و برای رسم تابع $y_۲=\sqrt{x+۳}$، ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ۳ واحد به چپ انتقال داده و سپس محدودیت دامنه یعنی $-۳\le x<۰$ را بر آن اعمال می‌کنیم:



با توجه به نمودار، برد تابع اجتماع برد هر یک از ضابطه‌هاست.

$$R_۱=[-۱,+\infty)\quad \text{و}\quad R_۲=[۰,\sqrt{۳})$$

$$R_f=R_۱\cup R_۲=[-۱,+\infty)\cup[۰,\sqrt{۳})=[-۱,+\infty)$$

راه حل دوم:

$$f_۱(x)=\sqrt{x}-۱\,;\,x\ge ۰$$

$$x\ge ۰\Rightarrow \sqrt{x}\ge ۰\Rightarrow \sqrt{x}-۱\ge -۱$$

$$f_۱(x)\ge -۱\Rightarrow R_۱=[-۱,+\infty)$$

$$f_۲(x)=\sqrt{x+۳}\,;\,-۳\le x<۰$$

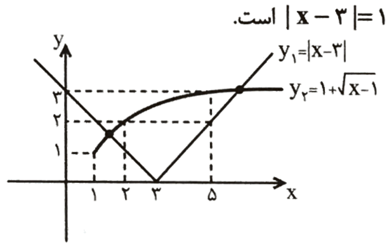
$$-۳\le x<۰\Rightarrow ۰\le x+۳<۳\Rightarrow ۰\le\sqrt{x+۳}<\sqrt{۳}$$

$$۰\le f_۲(x)<\sqrt{۳}\Rightarrow R_۲=[۰,\sqrt{۳})$$

$$R_f=R_۱\cup R_۲=[-۱,+\infty)\cup[۰,\sqrt{۳})=[-۱,+\infty)$$

۱۱۹۹. **گزینه‌ی ۱**

نمودار دو تابع $y_۱=|x-۳|$ و $y_۲=۱+\sqrt{x-۱}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. محل تقاطع این دو نمودار، ریشه‌های معادله‌ی $|x-۳|=۱+\sqrt{x-۱}$ است.



با توجه به نمودار، ریشه‌ی کوچکتر در بازه‌ی $(۱,۲)$ و ریشه‌ی بزرگتر معادله در بازه‌ی $(۵,+\infty)$ قرار دارد.

۱۲۰۰. **گزینه‌ی ۳**

دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برابر است با:

$$\begin{cases}x\ge ۰\Rightarrow D_f=[۰,+\infty)\\ x\ge ۰\Rightarrow \sqrt{x}\ge ۰\Rightarrow R_f=[۰,+\infty)\end{cases}$$

با توجه به اینکه انتقال افقی فقط روی دامنه و انتقال عمودی فقط روی برد تأثیر دارد، دامنه و برد هر یک از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

گزینه‌ی (۱): $f(x+۱)-۱$

دامنه: $[۰-۱,+\infty)=[-۱,+\infty)$

برد: $[۰-۱,+\infty)=[-۱,+\infty)$

گزینه‌ی (۲): $f(x-۱)+۱$

دامنه: $[۰+۱,+\infty)=[۱,+\infty)$

برد: $[۰+۱,+\infty)=[۱,+\infty)$

گزینه‌ی (۳): $f(x-۲)-۲$

دامنه: $[۰+۲,+\infty)=[۲,+\infty)$

برد: $[۰-۲,+\infty)=[-۲,+\infty)$

$\Rightarrow$ دامنه و برد برابر نیستند.

۱۲۰۱. **گزینه‌ی ۴**

اگر نمودار تابع f بیشتر از یک واحد به چپ یا بیشتر از یک واحد به بالا منتقل شود، آنگاه از ناحیه‌ی چهارم عبور نخواهد کرد.

در گزینه‌ی (۴)، تابع f دو واحد به چپ منتقل می‌شود، پس نمودار تابع $f(x+۲)$ از ناحیه‌ی چهارم عبور نخواهد کرد.

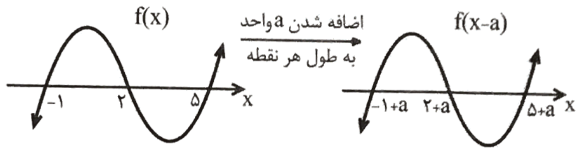
۱۲۰۲. **گزینه‌ی ۲**

به طور کلی برای اینکه نمودار تابع f از هر چهار ناحیه عبور کند، باید کمتر از ۳ واحد به راست یا کمتر از ۴ واحد به چپ و همچنین کمتر از یک واحد به پایین منتقل شود. در گزینه‌ی (۲)، تابع f، ۱ واحد به راست و ۰/۵ واحد به پایین منتقل شده و تابع $f(x-۱)-۰/۵$ حاصل شده است، پس نمودار این تابع از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.

دقت کنید که انتقال‌های گفته شده در بالا کلی است. باید در این انتقال‌ها خطی که در ناحیه‌ی دوم قرار دارد، بررسی شود. به عنوان مثال در انتقال $f(x-۲)-۰/۵$، این خط دیگر از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.

۱۲۰۳. گزینه‌ی ۲

به طول هر نقطه‌ی تابع $f(x)$، a واحد اضافه می‌شود و تابع $f(x-a)$ تشکیل می‌شود، پس نمودار تابع $f(x-a)$ به صورت زیر خواهد بود:



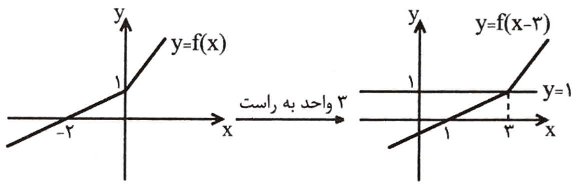
با توجه به نمودار تابع $f(x-a)$، ریشه‌های معادله‌ی $f(x-a)=0$ به‌صورت $x_1=-1+a$، $x_2=2+a$ و $x_3=5+a$ است، لذا:

$$x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow -1+a+2+a+5+a=0$$

$$\Rightarrow 3a+6=0 \Rightarrow a=-2$$

۱۲۰۴. گزینه‌ی ۲

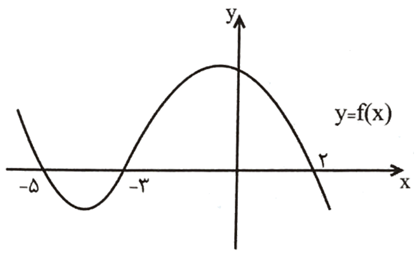
نمودار تابع $f(x)$ را ۳ واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $f(x-3)$ حاصل شود:



همان‌طور که مشاهده می‌شود در بازه‌ی $[3,+\infty)$ نمودار تابع $y=f(x-3)$ پایین خط $y=1$ قرار ندارد، پس حداقل مقدار a برابر با ۳ است.

۱۲۰۵. گزینه‌ی ۴

ابتدا نمودار تابع $y=f(x-2)$ را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم $(x\to x+2)$ تا نمودار تابع $y=f(x)$ حاصل شود.



حال دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ را می‌یابیم. باید:

$$xf(x)\geq 0$$

با تعیین علامت، جواب را می‌یابیم:

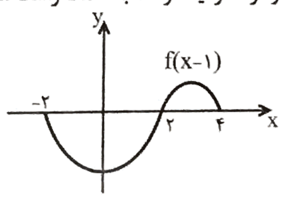
		−۵		−۳		۰		۲	
x	−		−		−	۰	+		+
$f(x)$	+	۰	−	۰	+		+	۰	−
$xf(x)$	−	۰	+	۰	−	۰	+	۰	−

پس مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی بالا و در نتیجه دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$x\in[-5,-3]\cup[0,2]$$

۱۲۰۶. گزینه‌ی ۲

ابتدا با کمک نمودار $y=f(x)$، نمودار $y=f(x-1)$ را رسم می‌کنیم. برای این کار باید نمودار f را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم:



حال دامنه‌ی تابع g را محاسبه می‌کنیم. باید عبارت زیر رادیکال یعنی $y=\dfrac{x}{f(x-1)}$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

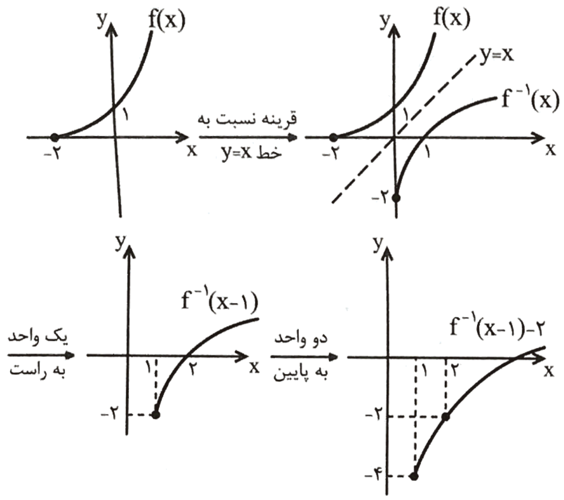
		−۲		۰		۲		۴	
x	−		−	۰	+		+		+
$f(x-1)$		۰	−		−	۰	+	۰	
$\dfrac{x}{f(x-1)}$		ت.ن	+	۰	−	ت.ن	+	ت.ن	

$$\Rightarrow D_g=(-2,0]\cup(2,4)$$

پس دامنه‌ی تابع g شامل سه عدد صحیح ۱-، صفر و ۳ است.

۱۲۰۷. گزینه‌ی ۴

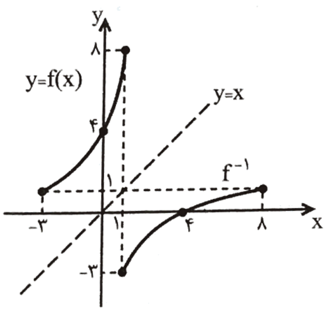
نمودار تابع $y=-2+f^{-1}(x-1)$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم.



بنابراین نمودار از ناحیه‌ی دوم و سوم عبور نمی‌کند.

۱۲۰۸. گزینه‌ی ۳

عبارت زیر رادیکال در تابع $g(x)=\sqrt{f^{-1}(x)}$ باید نامنفی باشد، پس $f^{-1}(x)\geq 0$. برای یافتن نمودار تابع f^{-1}، ابتدا نمودار تابع $y=f(x-2)$ را دو واحد به چپ منتقل کرده و سپس نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم. (توجه کنید که $f(0)=4$ است.)



با توجه به نمودار، تابع $f^{-1}(x)$ به ازای $x\in[4,8]$ نامنفی است، پس:

$$D_g=[4,8]$$

۱۲۰۹. گزینه‌ی ۳

ابتدا باید ضابطه‌ی $y=f(x)$ را بیابیم. برای این کار به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$g(x)=(x-1)^2 \xrightarrow{\text{نمودار دو واحد بالا برود}} y=(x-1)^2+2$$

$$\xrightarrow{\text{نمودار یک واحد به چپ برود}} f(x)=(x+1-1)^2+2$$

$$\Rightarrow f(x)=x^2+2$$

برای یافتن نقطه‌ی تلاقی تابع fog با محور yها، $x=۰$ را در تابع قرار می‌دهیم:

$$f(g(۰))=f((۰-۱)^۲)=f(۱)=۱^۲+۲=۳$$

۱۲۱۰. گزینه‌ی ۳

با توجه به نمودار $f(۰)=۲$، از طرفی $f(f(x-۲))=۲$، بنابراین:
$f(x-۲)=۰$

با توجه به نمودار، صفرهای تابع f که ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ هستند، برابر با ۳-، ۱ و ۵ است. با اضافه کردن ۲ واحد به طول این نقاط، صفرهای تابع $f(x-۲)$ یا ریشه‌های معادله‌ی $f(x-۲)=۰$ به دست می‌آیند، بنابراین:

$$\begin{cases} x_۱=-۳+۲=-۱ \\ x_۲=۱+۲=۳ \\ x_۳=۵+۲=۷ \end{cases} \Rightarrow \text{حاصلضرب ریشه‌ها}=(-۱)(۳)(۷)=-۲۱$$

راهبرد حل تیپ (۳۶)

الف- نمودار تابع $-f(x)$ با قرینه کردن نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور x ها به دست می‌آید.

ب- نمودار تابع $f(-x)$ با قرینه کردن نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور y ها به دست می‌آید.

پ- نمودار تابع $-f(-x)$ با قرینه کردن نمودار تابع $f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات به دست می‌آید.

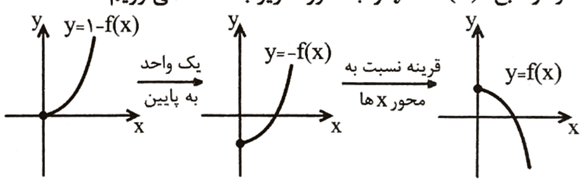
۱۲۱۱. گزینه‌ی ۳

$(f+g)(x)=۰$، پس به ازای هر x متعلق به دامنه‌ی تابع $f+g$ داریم:
$f(x)=-g(x)$

بنابراین باید نمودار f و g نسبت به محور x ها متقارن باشند.

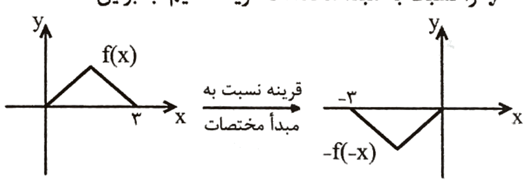
۱۲۱۲. گزینه‌ی ۱

نمودار تابع $y=f(x)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:



۱۲۱۳. گزینه‌ی ۳

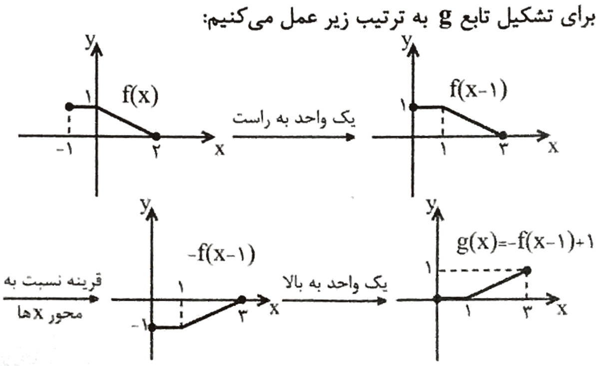
برای رسم نمودار تابع $y=-f(-x)$ کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم، بنابراین:



بنابراین نمودار تابع $y=-f(-x)$ در ناحیه‌ی سوم قرار دارد.

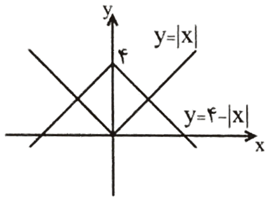
۱۲۱۴. گزینه‌ی ۴

برای تشکیل تابع g به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



۱۲۱۵. گزینه‌ی ۳

نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $y=-|x|+۴$، کافی است نمودار تابع $y=|x|$ را نسبت به محور xها قرینه کرده، سپس ۴ واحد در راستای محور yها، بالا ببریم. همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، مساحت محدود بین نمودار دو تابع $y=|x|$ و $y=-|x|+۴$، مساحت مربعی است که طول قطر آن برابر ۴ است.

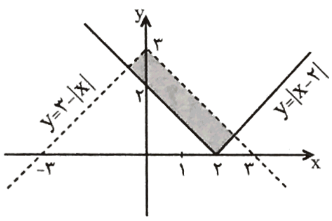


مساحت مربع، نصف مربع قطر آن است، پس:

$$\text{مساحت مربع}=\frac{۴^۲}{۲}=۸$$

۱۲۱۶. گزینه‌ی ۲

ابتدا نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



چون خطوط بر هم عمودند و ضلع‌ها نابرابرند، پس شکل پدید آمده مستطیل است.

۱۲۱۷. گزینه‌ی ۳

$$y=|x-۱| \xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} y=|x-۱|-۱$$

$$\xrightarrow{\text{دو واحد به سمت چپ}} y=|x+۲-۱|-۱ \Rightarrow y=|x+۱|-۱$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-|x+۱|+۱$$

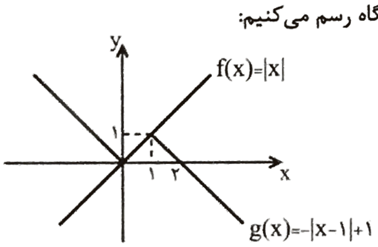
۱۲۱۸. گزینه‌ی ۱

$$f(x)=|x| \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y=|x-۱|$$

$$\xrightarrow{\text{انعکاس نسبت به محور x ها}} y=-|x-۱|$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y=-|x-۱|+۱ \Rightarrow g(x)=-|x-۱|+۱$$

می‌خواهیم ببینیم در چه بازه‌ای f بر g منطبق است. نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، دو تابع f و g در بازه‌ی $[۰,۱]$ بر هم منطبق‌اند.

۱۲۱۹. گزینه‌ی ۱

ضابطه‌ی تابع را می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} -|x+a|+b & , ۰\le x\le ۵ \\ k & , x\ge ۵ \end{cases}$$

که در آن k عددی ثابت است.

با توجه به شکل، نمودار تابع $g(x)=-|x+a|+b$ در بازه‌ی $[0\,,5]$ از روی تابع $y=-|x|$، با انتقال یک واحد این تابع به راست و سپس ۲ واحد به بالا به‌دست می‌آید، بنابراین ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y=-|x-1|+2$$

بنابراین:

$$f(x)=\begin{cases}-|x-1|+2 & , 0\le x\le 5\\ k & , x\ge 5\end{cases}$$

باید مقدار تابع به ازای $x=5$، در هر دو ضابطه برابر باشد:

$$k=f(5)=-|5-1|+2=-2\Rightarrow k=-2$$

پس ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=\begin{cases}-|x-1|+2 & , 0\le x\le 5\\ -2 & , x\ge 5\end{cases}$$

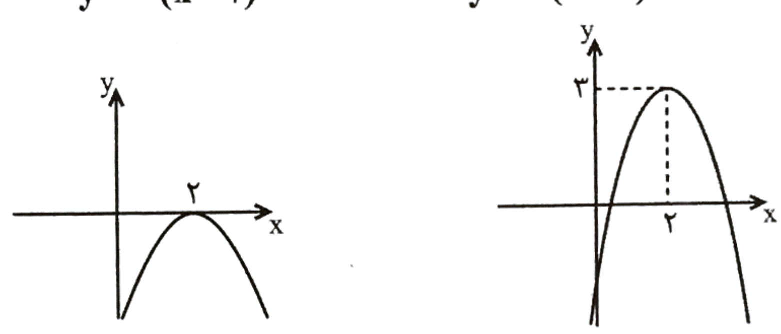
$$\Rightarrow f(7)+f(0)=-2+1=-1$$

۱۲۲۰. گزینه‌ی ۲

$$y=-(x^2-4x)-1=-((x-2)^2-4)-1=-(x-2)^2+3$$

کافی است نمودار $y=-x^2$ را دو واحد به راست و سپس ۳ واحد به بالا انتقال دهیم.

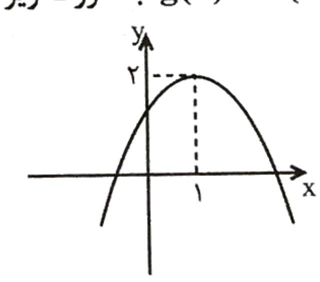
$y=-(x-2)^2+3$ $\qquad$ $y=-(x-2)^2$



دیده می‌شود که نمودار از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.

۱۲۲۱. گزینه‌ی ۱

نمودار تابع $g(x)=-(x-1)^2+2$ به‌صورت زیر است:



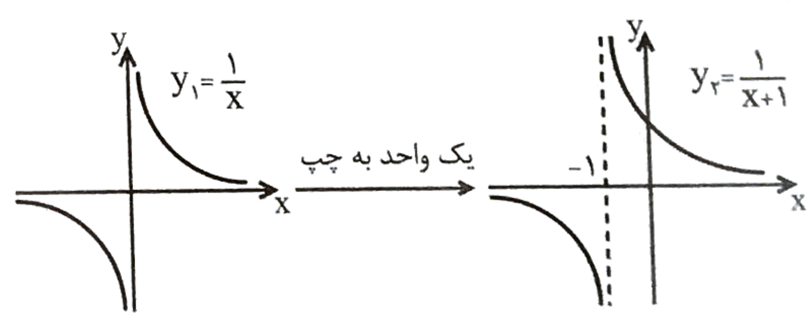
بنابراین برای رسم تابع f از روی g کافی است نمودار تابع g را ۱ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به پایین انتقال دهیم.

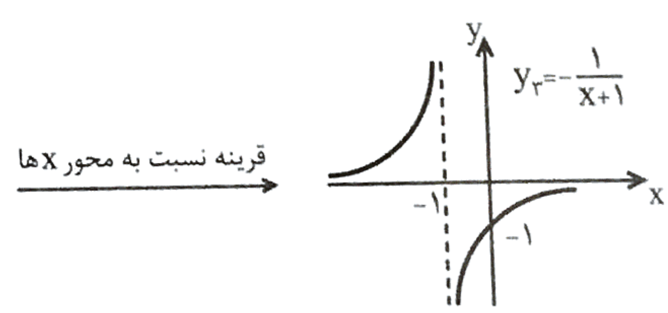
۱۲۲۲. گزینه‌ی ۴

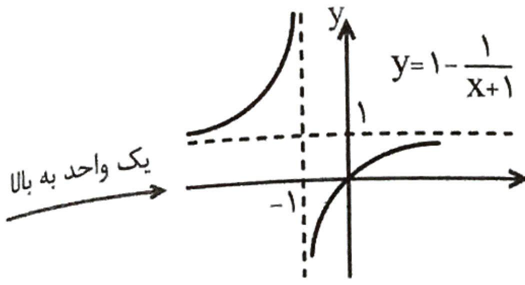
ابتدا مخرج کسر را در صورت آن ساخته، کسر را تفکیک می‌کنیم.

$$y=\frac{x}{x+1}=\frac{(x+1)-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$$

داریم:



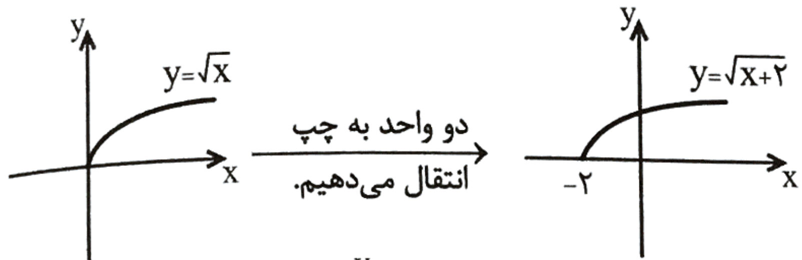


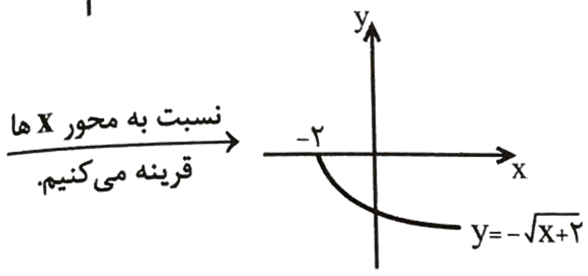


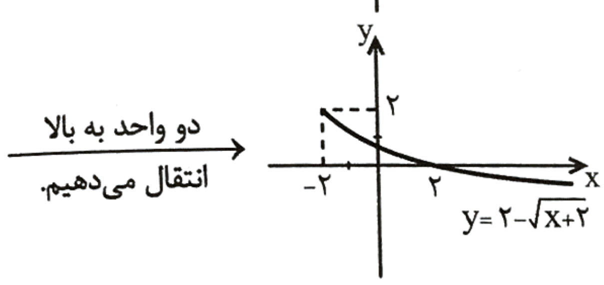
همانطور که ملاحظه می‌شود نمودار تابع از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد.

۱۲۲۳. گزینه‌ی ۳

نمودار تابع را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $f(x)=2-\sqrt{x+2}$، ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به چپ انتقال داده، سپس نسبت به محور xها قرینه کرده و در نهایت دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



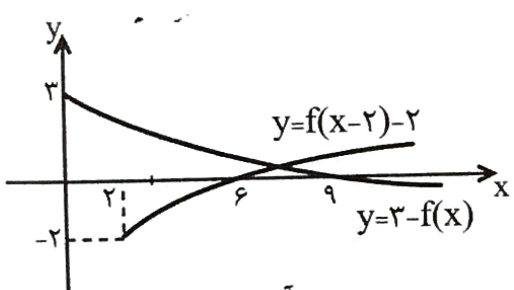




بنابراین نمودار تابع f، از ناحیه‌ی سوم نمی‌گذرد.

۱۲۲۴. گزینه‌ی ۳

برای رسم نمودار تابع $y=f(x-2)-2$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به راست و سپس دو واحد به پایین انتقال دهیم و برای رسم نمودار تابع $y=3-f(x)$، ابتدا قرینه‌ی تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها رسم نموده و سپس ۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم و هر دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود محل تقاطع دو نمودار در بازه‌ی $(6\,,9)$ قرار دارد. توجه کنید که محل تقاطع نمودارها با محور xها از حل معادله‌ی $y=0$ به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}3-\sqrt{x}=0 \quad\Rightarrow x=9\\ \sqrt{x-2}-2=0\Rightarrow x-2=4\Rightarrow x=6\end{cases}$$

۱۲۲۵. گزینه‌ی ۳

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{محور y ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=\sqrt{-(x-2)}=\sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y=\sqrt{-x+2}$ و $y=x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم)، آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

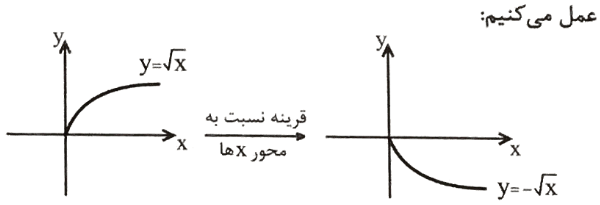
$$\sqrt{-x+2}=x\xrightarrow{\text{به توان ۲}}-x+2=x^2\Rightarrow x^2+x-2=0$$

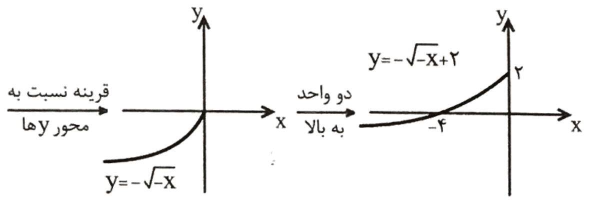
$$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=-2 \quad \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

$x=-2$ غیر قابل قبول است، زیرا در معادله‌ی اصلی صدق نمی‌کند.

۱۲۲۶. گزینه‌ی ۴

برای تشکیل تابع g از روی تابع $y=\sqrt{x}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:





$$\Rightarrow g(x)=-\sqrt{-x}+۲$$

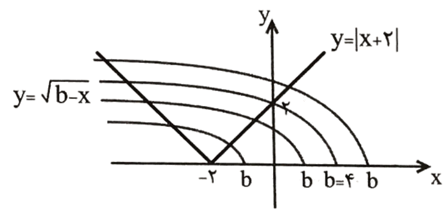
برای یافتن محل تلاقی خط $y=-۴$ با نمودار تابع g، معادله‌ی $g(x)=-۴$ را حل می‌کنیم:

$$g(x)=-۴\Rightarrow -\sqrt{-x}+۲=-۴\Rightarrow \sqrt{-x}=۶$$

$$\Rightarrow -x=۶^۲\Rightarrow x=-۳۶$$

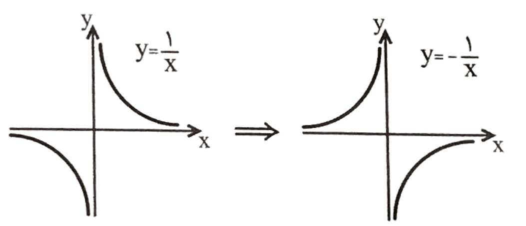
۱۲۲۷. گزینه‌ی ۱

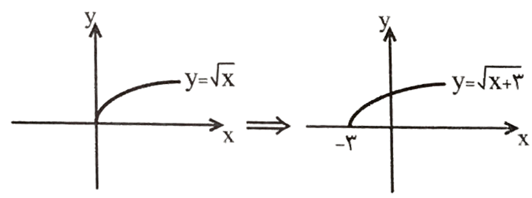
نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

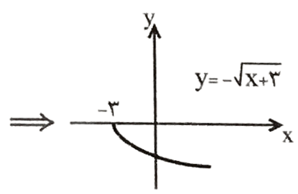


همانطور که مشاهده می‌شود برای آنکه نمودار تابع $y=|x+۲|$ به ازای x های بزرگتر از صفر بالای نمودار تابع $y=\sqrt{b-x}$ قرار گیرد باید b مقداری مثبت و حداکثر برابر با ۴ باشد. در این صورت تابع $y=|x+۲|$ در بازه‌ی $(۰,b)$ بالای نمودار تابع $y=\sqrt{b-x}$ قرار خواهد گرفت، پس $a=b$.

۱۲۲۸. گزینه‌ی ۱



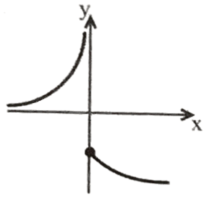




بنابراین، با اعمال شرط هر ضابطه، نمودار تابع

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{x} & ;\quad x<۰\\ -\sqrt{x+۳} & ;\quad x\geq ۰\end{cases}$$

به صورت روبه‌روست.

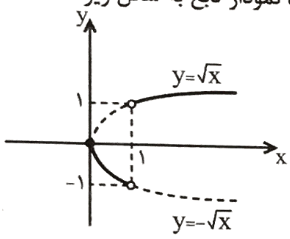


۱۲۲۹. گزینه‌ی ۳

معادله‌ی تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

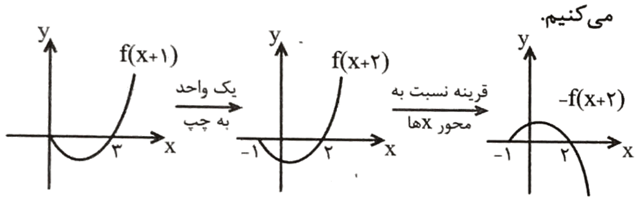
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-۱)\sqrt{x}}{x-۱} & x>۱\\ \dfrac{-(x-۱)\sqrt{x}}{x-۱} & ۰\leq x<۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x>۱\\ -\sqrt{x} & ۰\leq x<۱\end{cases}$$

توجه کنید که $x=۱$ ریشه‌ی مخرج است و در دامنه‌ی معادله قرار ندارد. بنابراین، نمودار تابع به شکل زیر است:



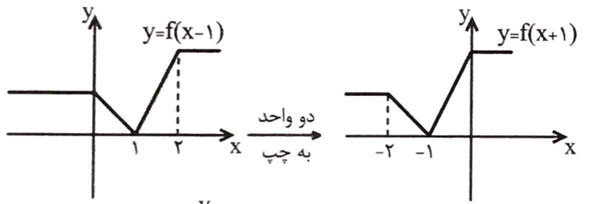
۱۲۳۰. گزینه‌ی ۱

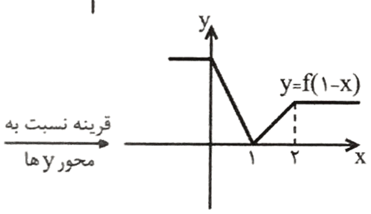
ابتدا با انتقال نمودار تابع $f(x+۱)$، نمودار تابع $-f(x+۲)$ را رسم می‌کنیم.



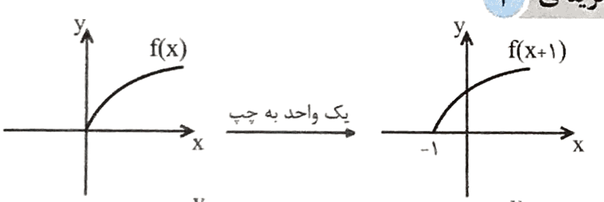
برای دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{-f(x+۲)}$ عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، بنابراین باید $-f(x+۲)\geq ۰$ باشد. با توجه به نمودار $-f(x+۲)$، دامنه، بازه‌ی $[-۱,۲]$ است.

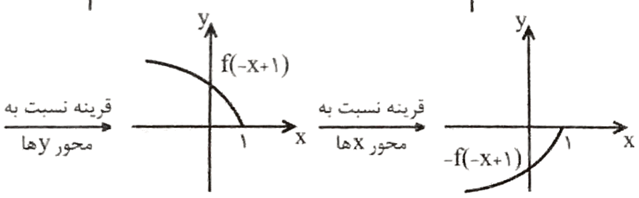
۱۲۳۱. گزینه‌ی ۳





۱۲۳۲. گزینه‌ی ۴





با توجه به شکل، نمودار تابع $g(x)=-|x+a|+b$ در بازه‌ی $[0,5]$ از روی تابع $y=-|x|$، با انتقال یک واحد این تابع به راست و سپس ۲ واحد به بالا به‌دست می‌آید، بنابراین ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y=-|x-1|+2$$

بنابراین:

$$f(x)=\begin{cases}-|x-1|+2 & , 0\le x\le 5\\ k & , x\ge 5\end{cases}$$

باید مقدار تابع به ازای $x=5$، در هر دو ضابطه برابر باشد:

$$k=f(5)=-|5-1|+2=-2\Rightarrow k=-2$$

پس ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر خواهد بود:

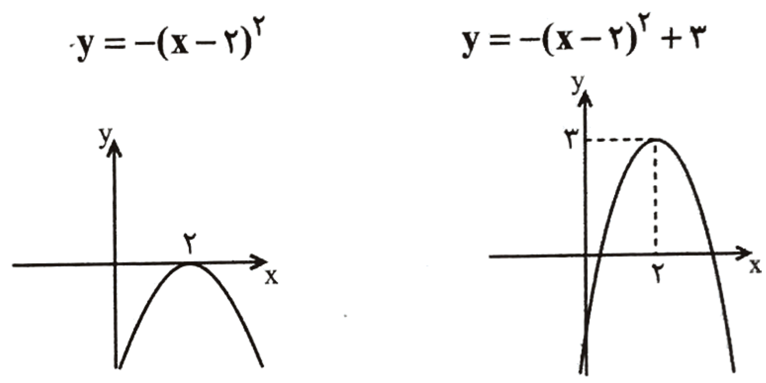
$$f(x)=\begin{cases}-|x-1|+2 & , 0\le x\le 5\\ -2 & , x\ge 5\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(7)+f(0)=-2+1=-1$$

۱۲۲۰. گزینه‌ی ۲

$$y=-(x^2-4x)-1=-((x-2)^2-4)-1=-(x-2)^2+3$$

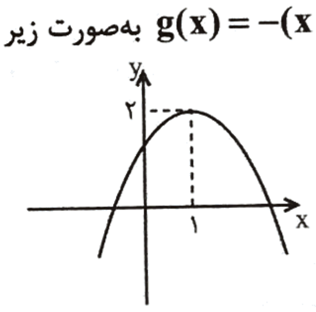
کافی است نمودار $y=-x^2$ را دو واحد به راست و سپس ۳ واحد به بالا انتقال دهیم.



دیده می‌شود که نمودار از ناحیه‌ی دوم عبور نمی‌کند.

۱۲۲۱. گزینه‌ی ۱

نمودار تابع $g(x)=-(x-1)^2+2$ به‌صورت زیر است:



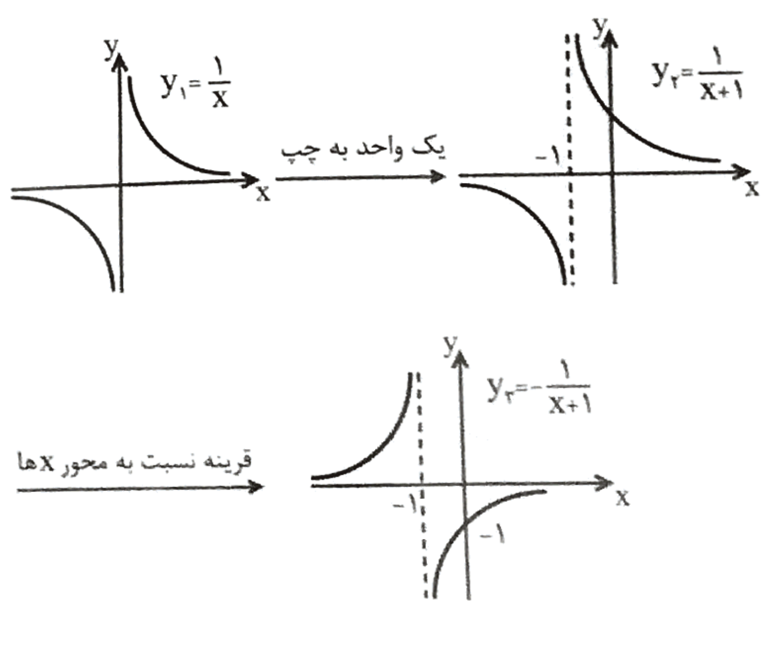
بنابراین برای رسم تابع f از روی g کافی است نمودار تابع g را ۱ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به پایین انتقال دهیم.

۱۲۲۲. گزینه‌ی ۴

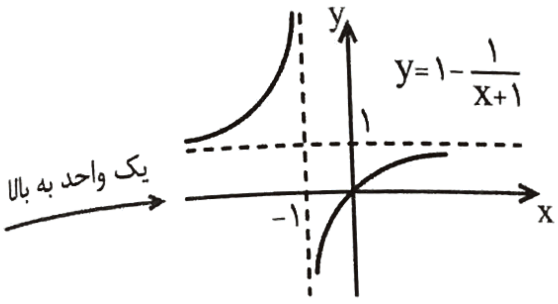
ابتدا مخرج کسر را در صورت آن ساخته، کسر را تفکیک می‌کنیم.

$$y=\frac{x}{x+1}=\frac{(x+1)-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$$

داریم:

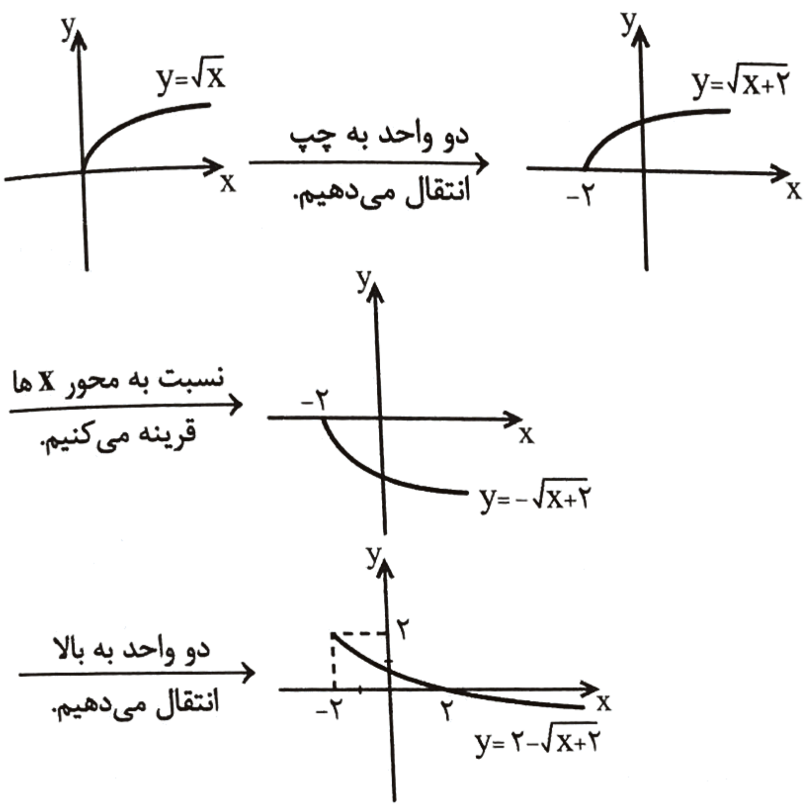


همانطور که ملاحظه می‌شود نمودار تابع از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد.



۱۲۲۳. گزینه‌ی ۳

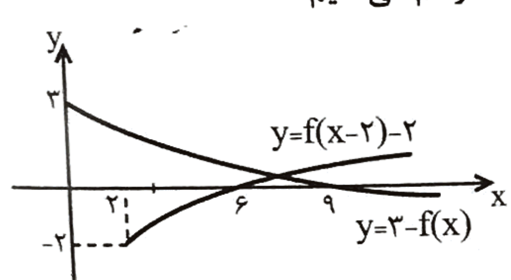
نمودار تابع را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $f(x)=2-\sqrt{x+2}$، ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به چپ انتقال داده، سپس نسبت به محور xها قرینه کرده و در نهایت دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



بنابراین نمودار تابع f، از ناحیه‌ی سوم نمی‌گذرد.

۱۲۲۴. گزینه‌ی ۳

برای رسم نمودار تابع $y=f(x-2)-2$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به راست و سپس دو واحد به پایین انتقال دهیم و برای رسم نمودار تابع $y=3-f(x)$، ابتدا قرینه‌ی تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها رسم نموده و سپس ۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم و هر دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود محل تقاطع دو نمودار در بازه‌ی $(6,9)$ قرار دارد. توجه کنید که محل تقاطع نمودارها با محور xها از حل معادله‌ی $y=0$ به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}3-\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=9\\ \sqrt{x-2}-2=0\Rightarrow x-2=4\Rightarrow x=6\end{cases}$$

۱۲۲۵. گزینه‌ی ۳

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{محور yها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=\sqrt{-(x-2)}=\sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y=\sqrt{-x+2}$ و $y=x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم)، آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

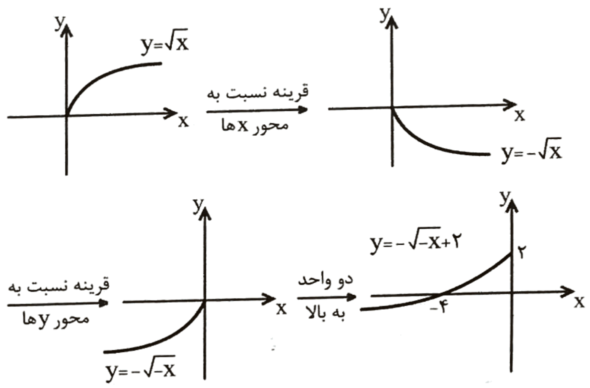
$$\sqrt{-x+2}=x\xrightarrow{\text{به توان ۲}}-x+2=x^2\Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=-2 \quad \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

$x=-2$ غیر قابل قبول است، زیرا در معادله‌ی اصلی صدق نمی‌کند.

۱۲۲۶. **گزینه‌ی ۴**

برای تشکیل تابع g از روی تابع $y=\sqrt{x}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



$$\Rightarrow g(x)=-\sqrt{-x}+۲$$

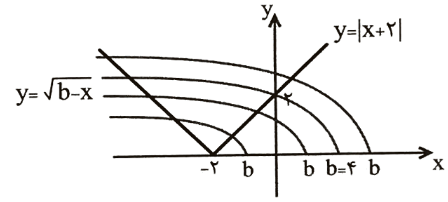
برای یافتن محل تلاقی خط $y=-۴$ با نمودار تابع g، معادله‌ی $g(x)=-۴$ را حل می‌کنیم:

$$g(x)=-۴\Rightarrow-\sqrt{-x}+۲=-۴\Rightarrow\sqrt{-x}=۶$$

$$\Rightarrow -x=۶^۲\Rightarrow x=-۳۶$$

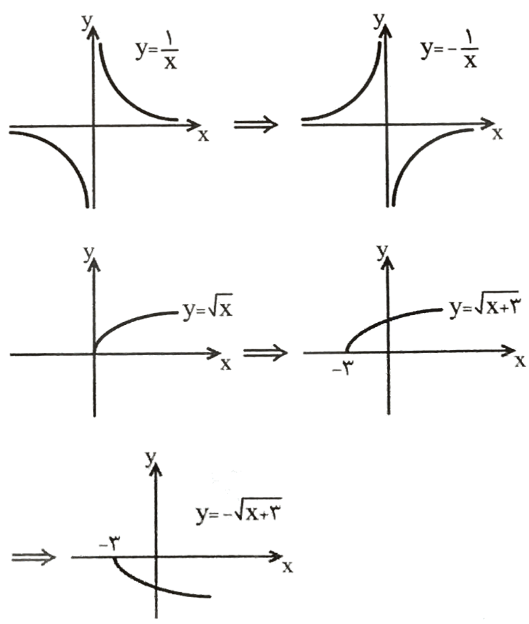
۱۲۲۷. **گزینه‌ی ۱**

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود برای آنکه نمودار تابع $y=|x+۲|$ به ازای xهای بزرگتر از صفر بالای نمودار تابع $y=\sqrt{b-x}$ قرار گیرد باید b مقداری مثبت و حداکثر برابر با ۴ باشد. در این صورت تابع $y=|x+۲|$ در بازه‌ی $(۰, b)$ بالای نمودار تابع $y=\sqrt{b-x}$ قرار خواهد گرفت، پس $a=b$.

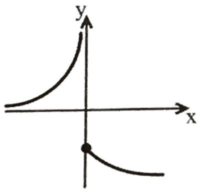
۱۲۲۸. **گزینه‌ی ۱**



بنابراین، با اعمال شرط هر ضابطه، نمودار تابع

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{۱}{x} & ; \quad x<۰\\ -\sqrt{x+۳} & ; \quad x\geq ۰\end{cases}$$

به صورت روبه‌روست.

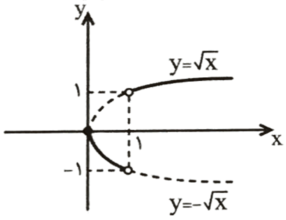


۱۲۲۹. **گزینه‌ی ۳**

معادله‌ی تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

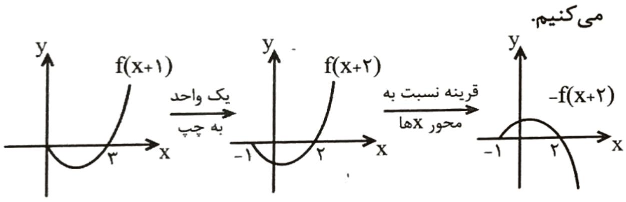
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-۱)\sqrt{x}}{x-۱} & x>۱\\ \dfrac{-(x-۱)\sqrt{x}}{x-۱} & ۰\leq x<۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x>۱\\ -\sqrt{x} & ۰\leq x<۱\end{cases}$$

توجه کنید که $x=۱$ ریشه‌ی مخرج است و در دامنه‌ی معادله قرار ندارد. بنابراین، نمودار تابع به شکل زیر است:



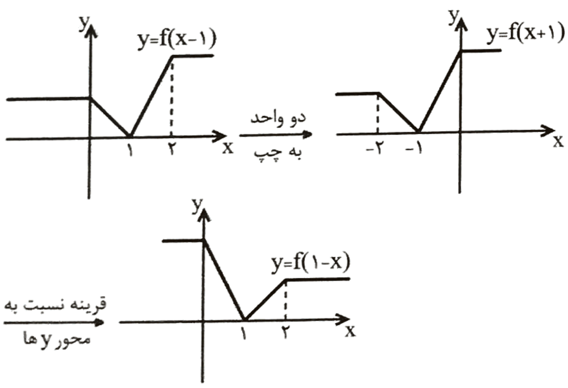
۱۲۳۰. **گزینه‌ی ۱**

ابتدا با انتقال نمودار تابع $f(x+۱)$، نمودار تابع $-f(x+۲)$ را رسم می‌کنیم.

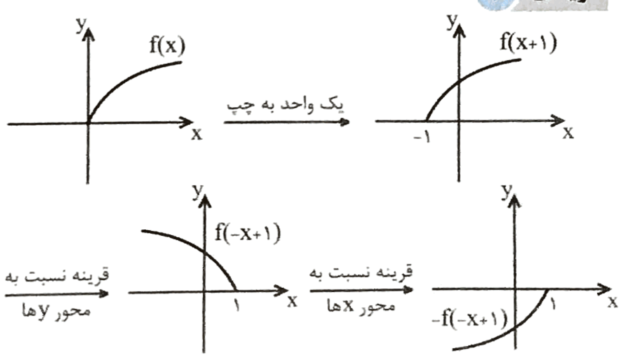


برای دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{-f(x+۲)}$ عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، بنابراین باید $-f(x+۲)\geq ۰$ باشد. با توجه به نمودار $-f(x+۲)$، دامنه، بازه‌ی $[-۱, ۲]$ است.

۱۲۳۱. **گزینه‌ی ۳**



۱۲۳۲. **گزینه‌ی ۴**



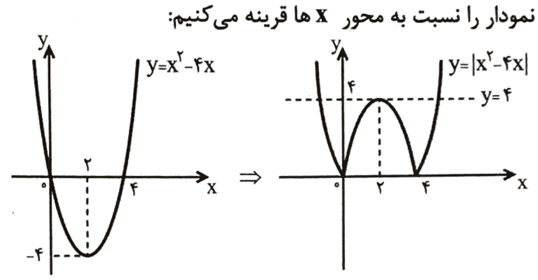
راهبرد حل تیپ (۲۷)

الف- برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$، ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، جاهایی که نمودار تابع f زیر محور xهاست را نسبت به محور xها قرینه کرده و قسمت پایین محور xها را حذف می‌کنیم.

ب- برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، قسمت سمت چپ محور yها را حذف کرده (در صورت وجود) و سپس قرینه‌ی قسمت سمت راست محور yها را نسبت به محور yها رسم کنیم.

۱۲۳۳. گزینه‌ی ۲

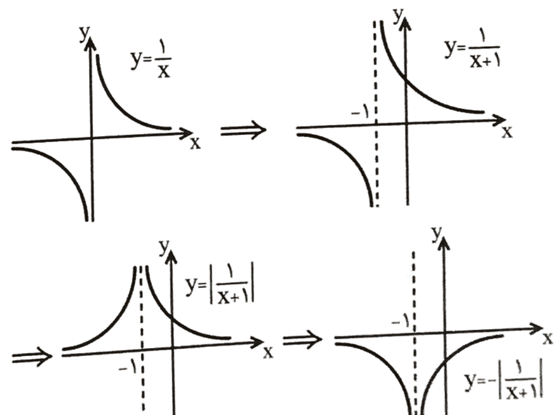
ابتدا نمودار تابع $y=x^2-4x$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های منفی نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



بنابراین $k=4$ می‌باشد.

۱۲۳۴. گزینه‌ی ۳

راه حل اول: داریم: $f(x)=\dfrac{-1}{|x+1|}=-\left|\dfrac{1}{x+1}\right|$، پس ابتدا $y=\dfrac{1}{x}$ را رسم کرده، با انتقال به اندازه‌ی یک واحد به سمت چپ، نمودار $y=\dfrac{1}{x+1}$ را ساخته و سپس با قرینه کردن قسمت‌های پایین محور xها نسبت به آن، نمودار $y=\left|\dfrac{1}{x+1}\right|$ را ساخته، نهایتاً با قرینه کردن نمودار حاصل نسبت به محور xها، نمودار $y=-\left|\dfrac{1}{x+1}\right|$ به دست می‌آید.



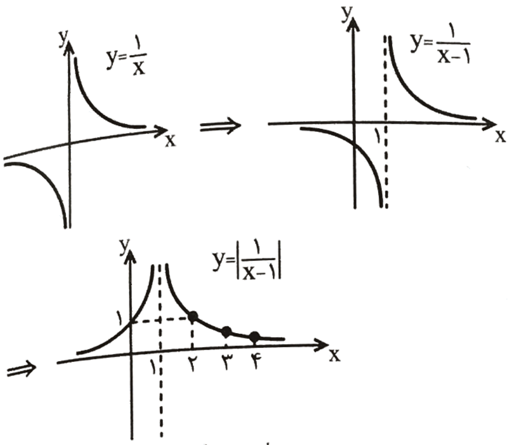
راه حل دوم: دقت کنید که:

$$\left|\dfrac{1}{x+1}\right|>0\Rightarrow-\left|\dfrac{1}{x+1}\right|<0\Rightarrow f(x)<0$$

از آنجا که همواره $f(x)$ منفی است، بنابراین هر گزینه‌ای که شامل ناحیه‌ی اول و دوم باشد رد می‌شود (زیرا در ناحیه‌ی اول و دوم y مثبت است)، پس گزینه‌های (۱)، (۲) و (۴) نمی‌توانند پاسخ سؤال باشند و جواب، گزینه‌ی (۳) است.

۱۲۳۵. گزینه‌ی ۱

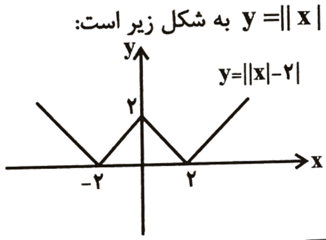
برای رسم نمودار f، ضابطه‌ی آن را به صورت $f(x)=\left|\dfrac{1}{x-1}\right|$ نوشته و از نمودار تابع $y=\dfrac{1}{x-1}$ استفاده می‌کنیم.



نقاط مشخص شده روی نمودار تابع $y=\left|\dfrac{1}{x-1}\right|$، تابع f را مشخص می‌کنند. همانطور که ملاحظه می‌کنید تنها به ازای $x=2$، برای f مقداری صحیح به دست می‌آید $(f(2)=1)$. برای سایر مقادیر قابل قبول x، مقدار $f(x)$، عددی در بازه‌ی $(0\,,1)$ است که این بازه شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

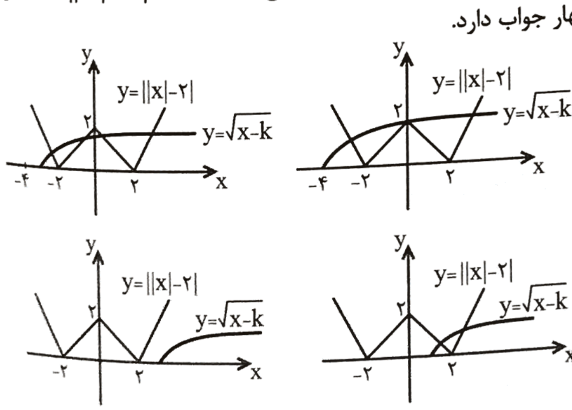
۱۲۳۶. گزینه‌ی ۲

نمودار تابع $y=||x|-2|$ به شکل زیر است:



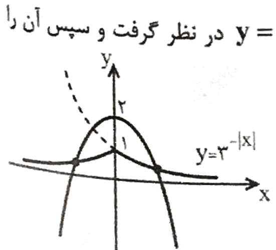
نمودار تابع $y=\sqrt{x-k}$ همان نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ است که $|k|$ واحد به چپ یا راست منتقل می‌شود.

مطابق شکل‌های زیر، با توجه به محدوده‌ی k، نمودار تابع $y=\sqrt{x-k}$ ممکن است نمودار تابع $y=||x|-2|$ را حداکثر در چهار نقطه قطع کند. پس معادله‌ی $||x|-2|=\sqrt{x-k}$ حداکثر چهار جواب دارد.



۱۲۳۷. گزینه‌ی ۲

نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. (می‌توان ضابطه‌ی تابع $y=3^{-|x|}$ را به صورت $y=(\frac{1}{3})^{|x|}$ در نظر گرفت و سپس آن را رسم کرد.)



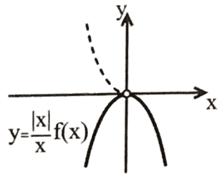
همانطور که مشاهده می‌شود دو نمودار در دو نقطه متقاطع‌اند.

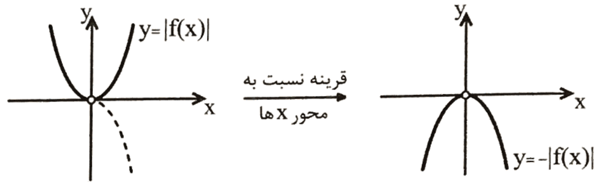
۱۲۳۸. گزینه‌ی ۱

ابتدا تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$y=\frac{|x|}{x}f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x}f(x)=f(x) & , \quad x>۰\\ \frac{-x}{x}f(x)=-f(x) & , \quad x<۰\end{cases}$$

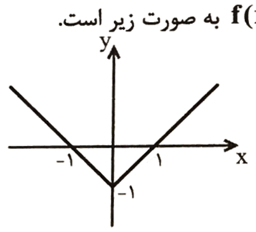
با توجه به نمودار، تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ با تابع $-|f(x)|$ برابر است که نمودار آن به صورت زیر رسم می‌شود:





۱۲۳۹. گزینه‌ی ۱

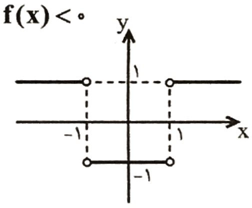
نمودار $f(x)=|x|-۱$ به صورت زیر است.



تابع $y=\frac{|f(x)|}{f(x)}$ را به‌صورت دوضابطه‌ای نوشته و رسم می‌کنیم.

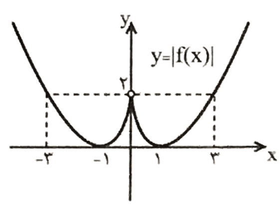
$$y=\frac{|f(x)|}{f(x)}=\begin{cases}\frac{f(x)}{f(x)}=۱ & ; \quad f(x)>۰\\ \frac{-f(x)}{f(x)}=-۱ & ; \quad f(x)<۰\end{cases}$$

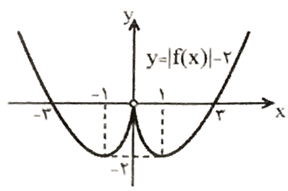
$$\Rightarrow y=\begin{cases}۱ & ; \quad x>۱ \text{ یا } x<-۱\\ -۱ & ; \quad -۱<x<۱\end{cases}$$



۱۲۴۰. گزینه‌ی ۳

ابتدا با استفاده از نمودار تابع f، نمودار تابع $y=|f(x)|-۲$ را رسم می‌کنیم. برای رسم این نمودار، ابتدا قسمت‌هایی از نمودار تابع $y=f(x)$ را که در زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(x)|$ به دست آید، سپس آن را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=|f(x)|-۲$ حاصل شود.





عبارت زیر رادیکال $y=\sqrt{|f(x)|-۲}$ باید نامنفی باشد، بنابراین $|f(x)|-۲\ge۰$، لذا با توجه به نمودار رسم شده داریم:

$x\ge۳ \cup x\le-۳$: دامنه‌ی تابع

به عبارت دیگر:

$|x|\ge۳$

راهبرد حل تیپ (۳۸)

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ در اختیار باشد و $k>۰$، آنگاه برای رسم نمودار تابع:

الف) $y=kf(x)$، عرض هر نقطه‌ی تابع f را k برابر می‌کنیم، یعنی اگر نقطه‌ی $(a,b)\in f$ آنگاه نقطه‌ی $(a,kb)\in kf$ است. در این حالت:

۱) اگر $k>۱$ باشد، نمودار در راستای محور y ها کشیده‌تر می‌شود.

۲) اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار در راستای محور y ها فشرده‌تر می‌شود.

ب) $y=-f(x)$، قرینه‌ی نمودار تابع f را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم.

• نکته‌ی ۱: اگر برد تابع $f(x)$ برابر با $[a,b]$ باشد، آنگاه برد تابع $kf(x)$ برابر است با:

$$\text{برد تابع } kf(x) \begin{cases}\xrightarrow{k \text{ مثبت}} [ka,kb]\\ \xrightarrow{k \text{ منفی}} [kb,ka]\end{cases}$$

• نکته‌ی ۲: برای رسم نمودار تابع $y=kf(x+a)+b$ از روی نمودار تابع $f(x)$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- انتقال افقی نمودار: $f(x+a)$

۲- k برابرکردن عرض نقاط: $kf(x+a)$

۳- انتقال عمودی نمودار: $kf(x+a)+b$

۱۲۴۱. گزینه‌ی ۲

نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ روی تابع $f(x)$ به نقطه‌ی $(x_۰,ky_۰)$ روی تابع $kf(x)$ تبدیل می‌شود، بنابراین:

$$A(-۴,۲)\xrightarrow{af(x)}A'(-۴,۲a)=(-۴,-۴)$$
$$\Rightarrow ۲a=-۴\Rightarrow a=-۲$$

۱۲۴۲. گزینه‌ی ۴

برای تبدیل هر نقطه روی نمودار $f(x)$ به نقطه‌ی متناظر آن روی نمودار $-۲f(x+۱)+۱$، به طول نقطه (-۱) واحد اضافه می‌شود، عرض آن -۲ برابر شده و سپس یک واحد به آن اضافه می‌شود.

$$A(x_۰,y_۰)\xrightarrow{-۲f(x+۱)+۱}A'(x_۰-۱,-۲y_۰+۱)$$

۱۲۴۳. گزینه‌ی ۲

نمودار تابع $g(x)=kf(x)+b$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند، بنابراین $g(۰)=۰$ و خواهیم داشت:

$$g(x)=kf(x)+b\xrightarrow{g(۰)=۰}۰=kf(۰)+b\Rightarrow f(۰)=\frac{-b}{k}$$

با توجه به نمودار $f(۰)=۴$، پس داریم: $\frac{-b}{k}=۴$ یا $b=-۴k$. تنها گزینه‌ای که در این رابطه صدق می‌کند گزینه‌ی (۲) است.

۱۲۴۴. گزینه‌ی ۱

انتقال افقی روی برد تابع تأثیر ندارد ولی انتقال‌های عمودی و انبساط (یا انقباض) عمودی برد تابع را تغییر می‌دهد و دقیقاً همان تغییرات روی برد اعمال می‌شود.

$$R_f=[-\sqrt{۵},۱]\Rightarrow-\sqrt{۵}\le f(x)\le۱$$
$$\xrightarrow[\text{برد تغییر نمی‌کند.}]{\text{در انتقال افقی}}-\sqrt{۵}\le f(x+۱)\le۱$$
$$\xrightarrow{\times(-\sqrt{۲})}-\sqrt{۲}\le-\sqrt{۲}f(x+۱)\le\sqrt{۱۰}$$

$$\xrightarrow{-۳} -\sqrt{۲}-۳ \le -\sqrt{۲}f(x+۱)-۳ \le \sqrt{۱۰}-۳$$

$$\Rightarrow -\sqrt{۲}-۳ \le g(x) \le \sqrt{۱۰}-۳$$

$$\Rightarrow R_g = [-\sqrt{۲}-۳\,,\,\sqrt{۱۰}-۳]$$

از آنجا که $-۵ < -\sqrt{۲}-۳ \le g(x) \le \sqrt{۱۰}-۳ < ۱$ برد تابع g شامل پنج عدد صحیح -۴، -۳، -۲، -۱ و صفر است.

۱۲۴۵. گزینه‌ی ۴

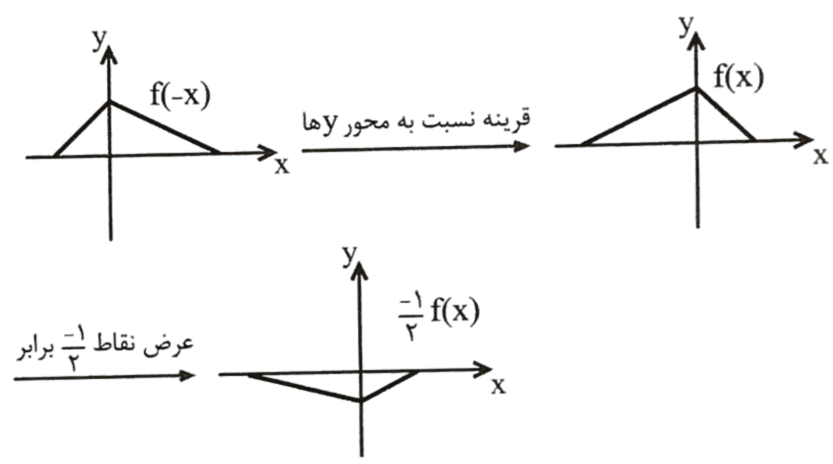
با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع $y = ۲f(x-۱)$ بازه‌ی $[-۱\,,۱]$ و برد آن بازه‌ی $[-۴\,,۴]$ است. اگر نمودار تابع $۲f(x-۱)$ را یک واحد به چپ انتقال داده و سپس عرض نقاط را $\frac{۱}{۴}$ برابر کنیم، نمودار تابع $g(x) = \frac{۱}{۲}f(x)$ حاصل می‌شود. بنابراین به طول هر نقطه (-۱) واحد اضافه شده و عرض هر نقطه $\frac{۱}{۴}$ برابر می‌شود، پس خواهیم داشت:

$$D_g = [-۱-۱\,,۱-۱] = [-۲\,,۰]$$

$$R_g = [\frac{۱}{۴}\times(-۴)\,,\,\frac{۱}{۴}\times ۴] = [-۱\,,۱]$$

۱۲۴۶. گزینه‌ی ۲

ابتدا نمودار تابع $f(-x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)$ حاصل شود:



۱۲۴۷. گزینه‌ی ۴

ضابطه‌ی تابع f، برابر $f(x) = |x|$ است، برای یافتن g به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x) \xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} f(x+۲) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} -f(x+۲)$$

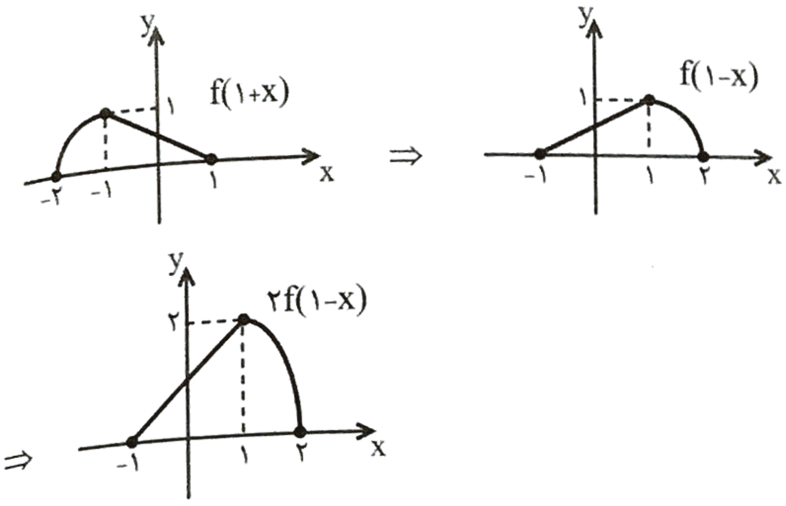
$$\xrightarrow{\text{برابرکردن عرض نقاط } \frac{۱}{۲}} -\frac{۱}{۲}f(x+۲)$$

$$\xrightarrow{\text{۳ واحد به پایین}} -\frac{۱}{۲}f(x+۲)-۳$$

بنابراین $g(x) = \frac{-۱}{۲}f(x+۲)-۳$.

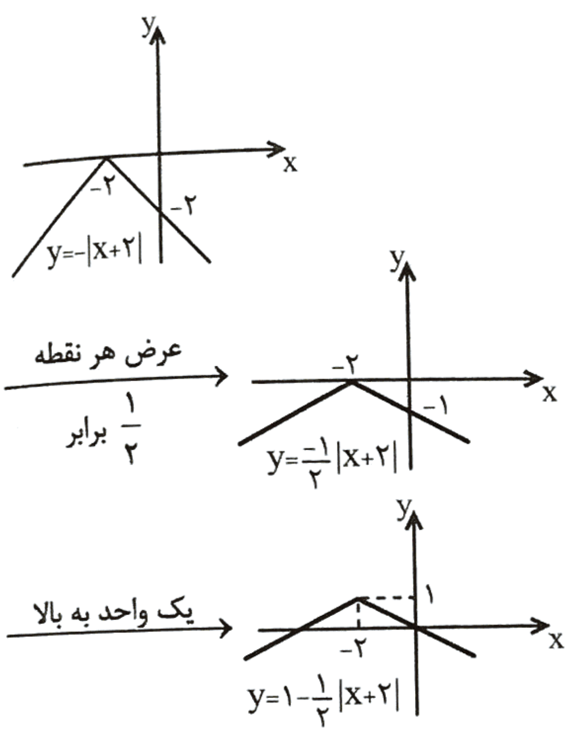
۱۲۴۸. گزینه‌ی ۴

با استفاده از نمودار تابع f، ابتدا نمودار تابع $y = f(۱+x)$ را رسم می‌کنیم که با یک واحد انتقال به چپ به‌دست می‌آید. سپس با تبدیل x به $-x$ به $f(۱-x)$ می‌رسیم که قرینه‌ی $f(۱+x)$ نسبت به محور yهاست و در نهایت $۲f(۱-x)$ را رسم می‌کنیم که انبساط در راستای محور yهاست.



۱۲۴۹. گزینه‌ی ۱

نمودار تابع $y = ۱-\frac{۱}{۲}|x+۲|$ را به کمک نمودار تابع $y = |x|$ رسم می‌کنیم.



بنابراین نمودار تابع از ناحیه‌ی اول عبور نمی‌کند.

۱۲۵۰. گزینه‌ی ۱

ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \sqrt{۹x+۱۸} = \sqrt{۹(x+۲)} = ۳\sqrt{x+۲}$$

بنابراین برای رسم نمودار تابع $g(x) = ۳\sqrt{x+۲}$ از روی نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-۱}$ کافی است ابتدا نمودار تابع f را سه واحد به چپ انتقال داده، سپس عرض هر نقطه را ۳ برابر کرده تا نمودار تابع $g(x) = ۳\sqrt{x+۲} = \sqrt{۹x+۱۸}$ حاصل شود.

راهبرد حل تیپ (۳۹)

① اگر نقطه‌ی $A(a\,,b)$ روی تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه‌ی $A'(\frac{a}{k}\,,b)$ روی تابع $y = f(kx)$ است.

به عنوان مثال، اگر نقطه‌ی $A(۱\,,۲)$ روی تابع $y = f(x)$ باشد آنگاه نقطه‌ی $A'(\frac{۱}{۲}\,,۲)$ روی تابع $y = f(۲x)$ است.

② اگر نمودار تابع $y = f(x)$ در اختیار باشد، برای رسم نمودار تابع:

الف) $y = f(kx)$، اگر $k > ۱$ باشد، تابع f در راستای محور xها با ضریب $\frac{۱}{k}$ فشرده می‌شود.

ب) $y = f(kx)$، اگر $۰ < k < ۱$ باشد، تابع f در راستای محور xها با ضریب $\frac{۱}{k}$ باز می‌شود.

پ) $y = f(-x)$، قرینه‌ی نمودار تابع f را نسبت به محور yها رسم می‌کنیم.

ت) $y = -f(-x)$، قرینه‌ی نمودار تابع f را نسبت به مبدأ مختصات رسم می‌کنیم.

.۱۲۵۱ گزینه‌ی ۱

نقطه‌ی $(-۸\,,۶)$ متعلق به $y=f(x)$ است، پس $f(-۸)=۶$، از طرفی نقطه‌ی $(۴,۳)$ روی تابع g است، پس $bf(۴a)=۳$، بنابراین $f(۴a)=\frac{۳}{b}$، لذا:

$$\begin{cases} f(-۸)=۶ \\ f(۴a)=\frac{۳}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a=-۸ \to a=-۲ \\ \frac{۳}{b}=۶ \to b=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow a+b=\frac{-۳}{۲}$$

.۱۲۵۲ گزینه‌ی ۳

نقطه‌ی $A(x_۰\,,y_۰)$ روی تابع $f(x)$ قرار دارد. برای یافتن طول نقطه‌ی متناظر آن روی تابع $-f(۱-\frac{x}{۲})$ باید قرار دهیم:

$$۱-\frac{x}{۲}=x_۰ \Rightarrow ۱-x_۰=\frac{x}{۲} \Rightarrow x=۲(۱-x_۰)=۲-۲x_۰$$

همچنین عرض نقاط روی تابع $-f(۱-\frac{x}{۲})$، (-۱) برابر عرض نقاط روی تابع $f(x)$ است، بنابراین: $y=-y_۰$، پس نقطه‌ی $A'(۲-۲x_۰\,,-y_۰)$ نقطه‌ی متناظر $A(x_۰\,,y_۰)$ روی تابع $-f(۱-\frac{x}{۲})$ است.

.۱۲۵۳ گزینه‌ی ۱

دامنه‌ی تابع $h(x)=f(ax)$ بازه‌ی $D_h=[۰\,,۱]$ است، پس دامنه‌ی تابع $f(x)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۰\le x\le ۱ \xrightarrow[a>۰]{\times a} ۰\le ax\le a \Rightarrow D_f=[۰\,,a]$$

با توجه به اینکه $g(x)=f(bx)$، دامنه‌ی تابع g با تقسیم دامنه‌ی تابع f بر b به دست می‌آید:

$$۰\le x\le a \xrightarrow[b<۰]{\text{تقسیم بر } b} \frac{a}{b}\le x\le ۰ \Rightarrow D_g=[\frac{a}{b}\,,۰]$$

.۱۲۵۴ گزینه‌ی ۴

دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $D_f=[-۱\,,۴]$ است، پس برای دامنه‌ی تابع $g(x)=-۳f(\frac{-x}{۲}+۲)$ باید مقدار $\frac{-x}{۲}+۲$ در بازه‌ی $[-۱\,,۴]$ قرار داشته باشد:

$$\frac{-x}{۲}+۲\in[-۱\,,۴] \Rightarrow -۱\le\frac{-x}{۲}+۲\le ۴$$

$$\xrightarrow{-۲} -۳\le\frac{-x}{۲}\le ۲ \xrightarrow{\times(-۲)} -۴\le x\le ۶$$

$$\Rightarrow D_g=[-۴\,,۶]$$

بنابراین دامنه‌ی تابع g شامل ۶ عدد طبیعی ۱ تا ۶ است.

.۱۲۵۵ گزینه‌ی ۲

ابتدا دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ را می‌یابیم:

$$۱۸\le x\le ۴۵ \Rightarrow ۶\le\frac{x}{۳}\le ۱۵ \Rightarrow ۳\le\frac{x}{۳}-۳\le ۱۲$$

$$\Rightarrow D_{f(x)}=[۳,۱۲]$$

برای تعیین دامنه‌ی تابع $f(\frac{۱}{۲}x+۱)$ داریم:

$$۳\le\frac{۱}{۲}x+۱\le ۱۲ \Rightarrow ۲\le\frac{۱}{۲}x\le ۱۱ \Rightarrow ۴\le x\le ۲۲$$

$$\Rightarrow D_{f(\frac{۱}{۲}x+۱)}=[۴,۲۲]$$

.۱۲۵۶ گزینه‌ی ۱

با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $D_f=[-۴\,,۴]$ است. برای یافتن دامنه‌ی تابع $f(\frac{x}{۲})$ دامنه‌ی تابع f را در ۲ ضرب و برای یافتن دامنه‌ی تابع $f(۲x)$، دامنه‌ی تابع f را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. پس داریم:

$$D_{f(\frac{x}{۲})}=[۲\times(-۴)\,,۲\times۴]=[-۸\,,۸]$$

$$D_{f(۲x)}=[\frac{-۴}{۲}\,,\frac{۴}{۲}]=[-۲\,,۲]$$

لذا دامنه‌ی تابع $g(x)=f(\frac{x}{۲})-f(۲x)$ برابر است با:

$$D_g=D_{f(\frac{x}{۲})}\cap D_{f(۲x)}=[-۸\,,۸]\cap[-۲\,,۲]=[-۲\,,۲]$$

.۱۲۵۷ گزینه‌ی ۱

با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع f، بازه‌ی $[-۴\,,۶]$ است، دامنه‌ی توابع $f(-x)$ و $f(۲x-۴)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$-۴\le -x\le ۶ \xrightarrow{\times(-۱)} -۶\le x\le ۴$$

$$\Rightarrow D_{f(-x)}=[-۶\,,۴]$$

$$-۴\le ۲x-۴\le ۶ \xrightarrow{+۴} ۰\le ۲x\le ۱۰ \xrightarrow{\div ۲} ۰\le x\le ۵$$

$$\Rightarrow D_{f(۲x-۴)}=[۰\,,۵]$$

بنابراین دامنه‌ی تابع $g(x)=f(-x)+f(۲x-۴)$ برابر است با:

$$D_g=D_{f(-x)}\cap D_{f(۲x-۴)}=[-۶\,,۴]\cap[۰\,,۵]=[۰\,,۴]$$

پس دامنه‌ی تابع g شامل ۵ عدد صحیح است.

.۱۲۵۸ گزینه‌ی ۲

با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $D_f=[-۲\,,۶]$ است. از آنجا که انتقال عمودی و انقباض یا انبساط عمودی روی دامنه‌ی تابع تأثیر ندارد، برای دامنه‌ی تابع $۳f(۲-x)+۱$ باید مقدار $۲-x$ در بازه‌ی $[-۲\,,۶]$ قرار گیرد، پس داریم:

$$۲-x\in[-۲\,,۶] \Rightarrow -۲\le ۲-x\le ۶$$

$$\xrightarrow{-۲} -۴\le -x\le ۴ \xrightarrow{\times(-۱)} -۴\le x\le ۴$$

$$\Rightarrow D=[-۴\,,۴]$$

.۱۲۵۹ گزینه‌ی ۴

با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $D_f=[۰\,,۲]$ است. برای دامنه‌ی تابع $f(۱-x)$ باید مقدار $۱-x$ در بازه‌ی $[۰\,,۲]$ قرار گیرد، پس داریم:

$$۱-x\in[۰\,,۲] \Rightarrow ۰\le ۱-x\le ۲ \xrightarrow{-۱} -۱\le -x\le ۱$$

$$\xrightarrow{\times(-۱)} -۱\le x\le ۱$$

$$\Rightarrow D_{f(۱-x)}=[-۱\,,۱]$$

بنابراین دامنه‌ی تابع $g(x)=\frac{f(۱-x)}{f(x)}$ برابر است با:

$$D_g=(D_{f(۱-x)}\cap D_f)-\{x\,|\,f(x)=۰\}$$

$$=([-۱\,,۱]\cap[۰\,,۲])-\{x=۰\,,۲\}=[۰\,,۱]-\{۰\,,۲\}$$

$$\Rightarrow D_g=(۰\,,۱]$$

۱۲۶۰. گزینه‌ی ۴

با توجه به نمودار، برد تابع f بازه‌ی $R_f=[-۱,۱]$ است. انبساط یا انقباض افقی روی برد تابع تأثیری ندارد و فقط انتقال عمودی و انبساط یا انقباض عمودی، برد تابع را تغییر می‌دهد که دقیقاً همان تغییرات روی برد اعمال می‌شود، بنابراین:

$$R_f=[-۱,۱]\Rightarrow -۱\le f(x)\le ۱$$

$$\xrightarrow[\text{برد تغییر نمی‌کند.}]{\text{در انبساط افقی}} -۱\le f(\frac{x}{۲})\le ۱$$

$$\xrightarrow{\times(۳)} -۳\le ۳f(\frac{x}{۲})\le ۳ \xrightarrow{+۱} -۲\le ۳f(\frac{x}{۲})+۱\le ۴$$

$$\Rightarrow \text{برد}=[-۲,۴]$$

۱۲۶۱. گزینه‌ی ۳

در تابع $y=f(x)$ اگر طول هر نقطه را دو برابر کنیم، تابع $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ به دست می‌آید، حال اگر نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه کنیم، معادله‌ی تابع به‌صورت $-f(\frac{۱}{۲}x)$ خواهد شد.

۱۲۶۲. گزینه‌ی ۴

برای رسم نمودار تابع $y=f(-۲x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، کافی است ابتدا نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه کنیم تا نمودار تابع $y=f(-x)$ حاصل شود، سپس با ضریب $\frac{۱}{۲}$ در راستای محور xها منقبض کنیم تا نمودار تابع $y=f(-۲x)$ حاصل شود.

۱۲۶۳. گزینه‌ی ۳

برای یافتن ریشه‌های معادله‌ی $f(۲x)=۰$ کافی است ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ را بر ۲ تقسیم کنیم. محل تلاقی نمودار f با محور xها، ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ است، بنابراین ۲، ۱- و ۳- ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ و در نتیجه $\frac{۲}{۲}=۱$، $\frac{-۱}{۲}$ و $\frac{-۳}{۲}$ ریشه‌های معادله‌ی $f(۲x)=۰$ هستند، بنابراین:

$$f(۲x)=۰ \text{ مجموع ریشه‌های معادله‌ی}: ۱+(\frac{-۱}{۲})+(\frac{-۳}{۲})=-۱$$

۱۲۶۴. گزینه‌ی ۱

تابع $f(\frac{x}{۴})$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۴ قطع می‌کند، پس نقطه‌ی $(۴,۰)$ روی نمودار تابع $f(\frac{x}{۴})$ قرار دارد، بنابراین:

$$y=f(\frac{x}{۴})\xrightarrow[y=۰]{x=۴} ۰=f(\frac{۴}{۴})\Rightarrow f(۱)=۰$$

بنابراین نمودار تابع $y=f(x)$ محور xها را در نقطه‌ی $(۱,۰)$ قطع می‌کند و در تابع $y=f(x-۲)$، این نقطه به نقطه‌ی $(۱+۲,۰)$ یا $(۳,۰)$ تبدیل می‌شود.

۱۲۶۵. گزینه‌ی ۴

برای حل معادله‌ی $۲f(۲x)-۱=k$ داریم:

$$۲f(۲x)-۱=k\Rightarrow ۲f(۲x)=k+۱\Rightarrow f(۲x)=\frac{k+۱}{۲}$$

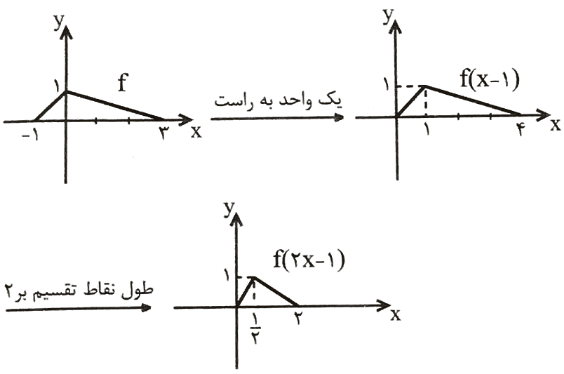
تعداد جواب‌های معادله‌ی فوق برابر با تعداد نقاط تلاقی خط $y=\frac{k+۱}{۲}$ با نمودار تابع $y=f(۲x)$ است.

با توجه به نمودار تابع $f(x)$، خط $y=۰$ نمودار تابع را در سه نقطه قطع می‌کند. بقیه‌ی خطوط $y=m$ (خطوط موازی محور xها)، نمودار تابع $f(x)$ را در یک یا دو نقطه قطع می‌کنند یا نمودار را قطع نمی‌کنند. از آنجا که نمودار تابع $f(۲x)$، با تقسیم طول نقاط تابع $f(x)$ بر ۲ به دست می‌آید، پس تعداد نقاط تلاقی خط $y=۰$ با نمودار تابع $f(۲x)$ تغییری نمی‌کند و برابر با ۳ خواهد بود. بنابراین:

$$f(۲x)=\frac{k+۱}{۲}=۰\Rightarrow k+۱=۰\Rightarrow k=-۱$$

۱۲۶۶. گزینه‌ی ۴

برای رسم نمودار تابع $f(۲x-۱)$، ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به راست انتقال داده تا نمودار تابع $f(x-۱)$ حاصل شود. سپس طول نقاط تابع $f(x-۱)$ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $f(۲x-۱)$ به دست آید.



۱۲۶۷. گزینه‌ی ۲

با توجه به نمودار، از طول نقاط تابع f یک واحد کم شده و سپس تقسیم بر ۲ شده و طول نقاط متناظر آنها روی تابع g به دست آمده است. همچنین عرض نقاط ثابت مانده است، بنابراین:

$$A(x_۰,y_۰)\to A'(\frac{x_۰-۱}{۲},y_۰)=A(x,y)$$

$$\Rightarrow x=\frac{x_۰-۱}{۲}\Rightarrow x_۰=۲x+۱,\ y_۰=y$$

$$\Rightarrow g(x)=f(۲x+۱)$$

۱۲۶۸. گزینه‌ی ۴

فرض کنید تابع پس از انبساط و انتقال مطرح شده در صورت سؤال به فرم $f(ax+b)$ تبدیل شده باشد. حال انبساط و انتقال را در جهت عکس انجام می‌دهیم تا به تابع اولیه‌ی $f(x)$ برسیم. در نتیجه ابتدا تابع را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. داریم:

$$f(a(x-۲)+b)$$

سپس تابع را با ضریب $\frac{۱}{۲}$ انقباض افقی می‌دهیم. داریم:

$$f(a(۲x-۲)+b)$$

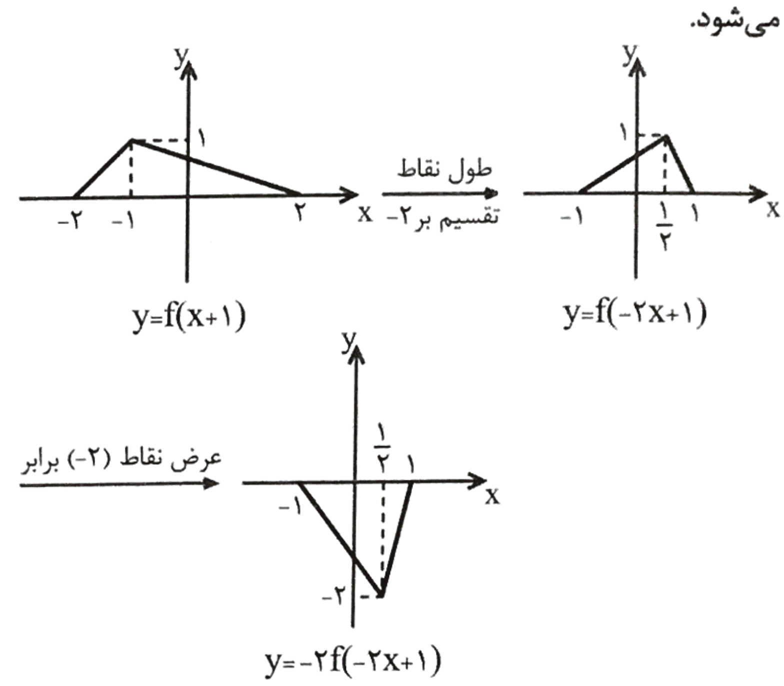
حال از تساوی $f(a(۲x-۲)+b)=f(x)$ مقادیر a و b را پیدا می‌کنیم:

$$۲ax-۲a+b=x\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۱}{۲}\\ b=۱\end{cases}$$

پس جواب سؤال $f(\frac{۱}{۲}x+۱)$ است.

۱۲۶۹. گزینه‌ی ۳

ابتدا نمودار تابع $y=f(x+1)$ را رسم می‌کنیم، سپس نمودار تابع $y=f(-2x+1)$ و در انتها نمودار تابع $y=-2f(-2x+1)$ رسم می‌شود.



۱۲۷۰. گزینه‌ی ۲

برای آن که نمودار با ضریب ۲ در راستای محور x ها منبسط شود، باید در ضابطهٔ تابع، x را بر ۲ تقسیم کنیم و برای آن که نمودار تابع ۳ واحد به سمت بالا منتقل شود، باید ضابطه را با ۳ جمع کنیم. برای یافتن محل تقاطع دو نمودار جدید و اولیه باید ضابطه‌های جدید و اولیه را با هم برابر قرار دهیم:

$$f(\frac{x}{2})+3=f(x)\Rightarrow(\frac{x}{2})^2-1+3=x^2-1$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{4}+3=x^2\Rightarrow\frac{3}{4}x^2=3\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2$$

۱۲۷۱. گزینه‌ی ۲

ابتدا تابع g را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}}y=\sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}}y=-\sqrt{x+1}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\text{واحد به بالا}}y=-\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g(x)=-\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}$$

برای یافتن ریشه‌های معادله‌ی $g(2x)=0$ کافی است ریشه‌های معادله‌ی $g(x)=0$ را بر ۲ تقسیم کنیم.

$$g(x)=0\Rightarrow-\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}=0\Rightarrow\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x+1=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\frac{-3}{4}$$

پس ریشه‌ی معادله‌ی $g(2x)=0$ برابر با $x=\frac{\frac{-3}{4}}{2}=\frac{-3}{8}$ است

۱۲۷۲. گزینه‌ی ۲

وقتی نمودار تابع یک واحد به چپ منتقل می‌شود، باید در ضابطه‌ی تابع، تغییر $x\to x+1$ را اعمال کنیم، در نتیجه:

$$y=\sqrt{1-2(x+1)}=\sqrt{-2x-1}$$

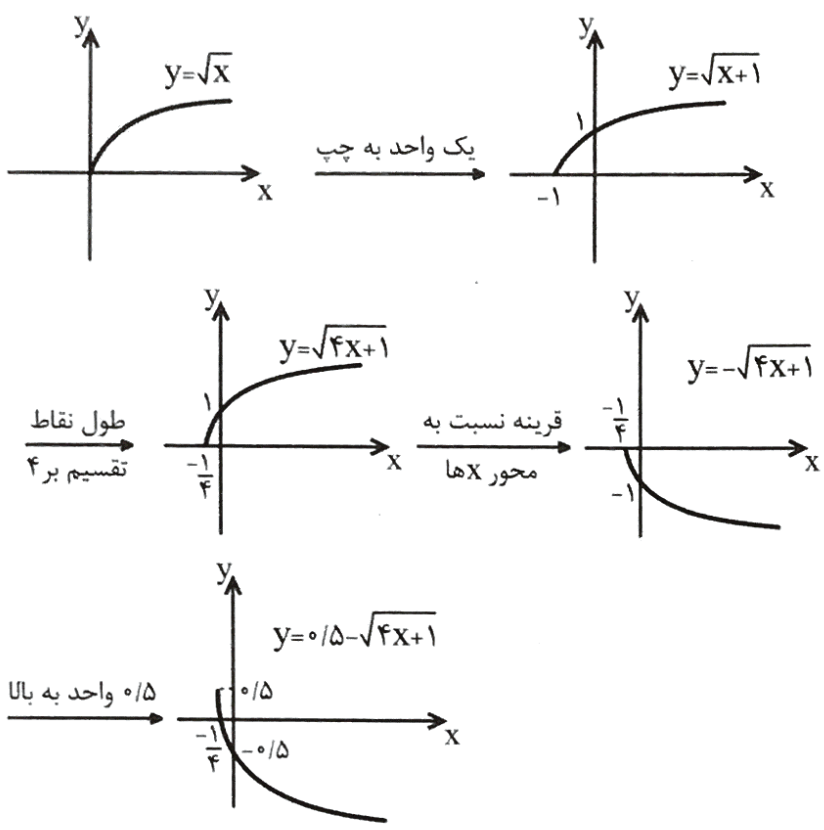
وقتی نمودار تابع نسبت به محور y ها قرینه می‌شود، باید در ضابطه‌ی تابع، تغییر $x\to -x$ را اعمال کنیم، در نتیجه:

$$y=\sqrt{-2(-x)-1}=\sqrt{2x-1}$$

در نهایت وقتی نمودار یک واحد به سمت بالا منتقل می‌شود، ضابطه‌ی $y=1+\sqrt{2x-1}$ حاصل می‌شود.

۱۲۷۳. گزینه‌ی ۱

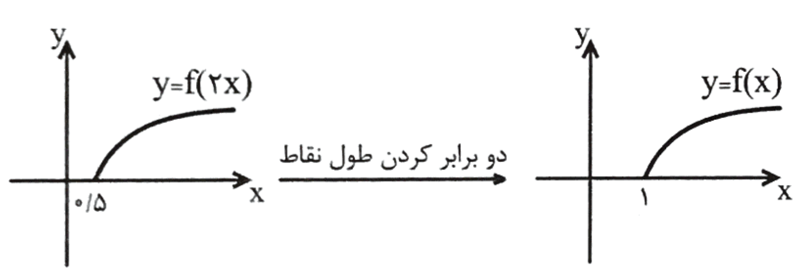
نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



پس نمودار تابع $y=0/5-\sqrt{4x+1}$ از ناحیه‌ی اول عبور نمی‌کند.

۱۲۷۴. گزینه‌ی ۲

از آنجا که $f(\frac{2x}{2})=f(x)$، با دو برابر کردن طول نقاط تابع $y=f(2x)$، نمودار تابع $f(x)$ حاصل می‌شود. بنابراین:



بنابراین دامنه‌ی تابع $f(x)$ بازه‌ی $[1,+\infty)$ است. از طرفی دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{ax+b}$ برابر است با:

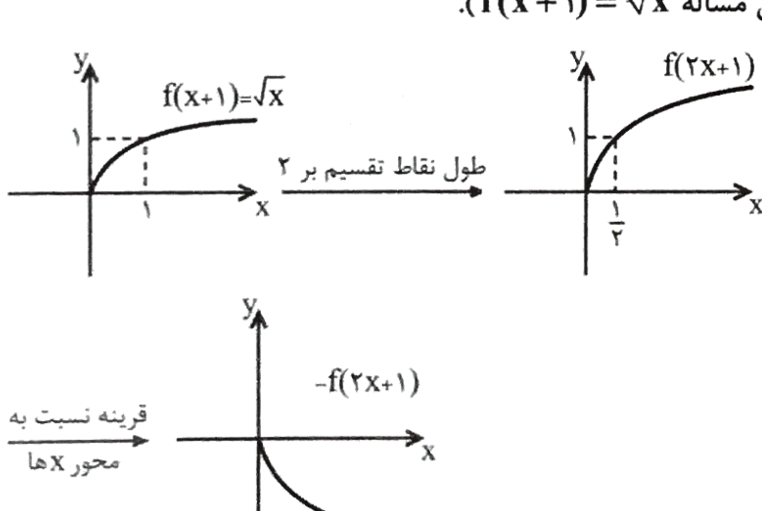
$$ax+b\geq0\Rightarrow ax\geq-b$$

$$\xrightarrow{\text{a مثبت}}x\geq\frac{-b}{a}\Rightarrow D_f=[\frac{-b}{a},+\infty)$$

بنابراین $\frac{-b}{a}=1$ و در نتیجه $a=-b$. توجه کنید چون a مثبت است پس گزینه‌ی (۲) صحیح است.

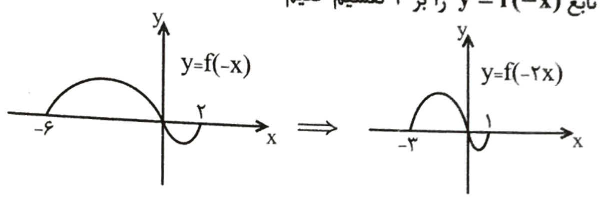
۱۲۷۵. گزینه‌ی ۳

برای رسم نمودار تابع $-f(2x+1)$، ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $f(x+1)$ حاصل شود (با توجه به فرض مسأله $f(x+1)=\sqrt{x}$).



۱۲۷۶. گزینه‌ی ۲

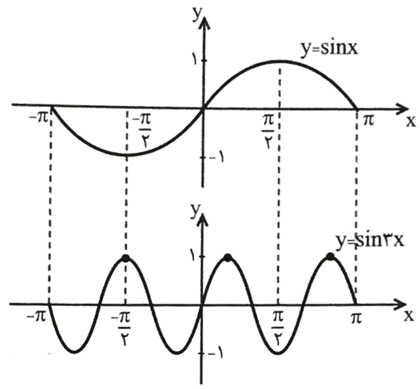
باید حدودی از x را بیابیم که $f(-2x) > 0$ باشد، برای این منظور ابتدا نمودار تابع $y = f(-2x)$ را با استفاده از نمودار $y = f(x)$ رسم می‌کنیم، $y = f(-x)$ قرینه‌ی تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y هاست و برای رسم $y = f(-2x)$، کافی است طول نقاط تابع $y = f(-x)$ را بر ۲ تقسیم کنیم، لذا:



بنابراین در بازه‌ی $(-3, 0)$، $f(-2x) > 0$ است.

۱۲۷۷. گزینه‌ی ۳

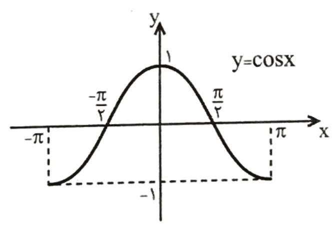
نمودار تابع $y = \sin 3x$ را با تقسیم کردن طول نقاط تابع $y = \sin x$ بر ۳ رسم می‌کنیم.

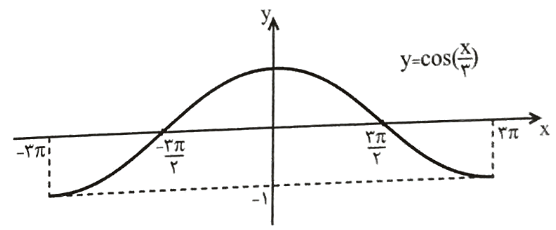


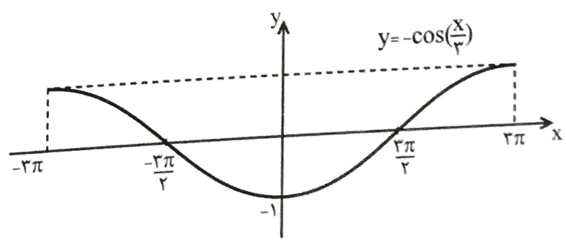
همانطور که مشاهده می‌شود تابع $y = \sin 3x$ در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ در سه نقطه به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

۱۲۷۸. گزینه‌ی ۳

برای رسم نمودار تابع $y = -\cos\frac{x}{3}$ ابتدا طول نقاط تابع $y = \cos x$ را ۳ برابر کرده، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



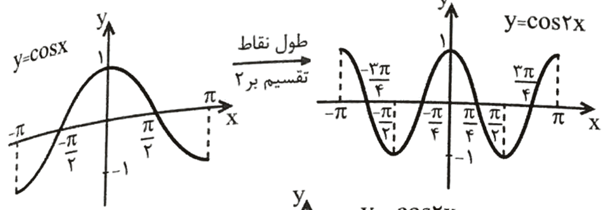


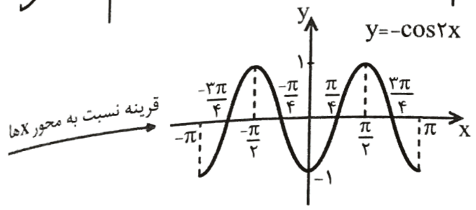


توجه کنید که نمودار تابع $y = -\cos\frac{x}{3}$ محور x ها را در نقاطی با طول بیشتر از π و کمتر از $-\pi$ قطع می‌کند، پس گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۱۲۷۹. گزینه‌ی ۱

برای رسم نمودار تابع $y = -\cos 2x$ ابتدا طول نقاط تابع $y = \cos x$ را بر ۲ تقسیم کرده و سپس نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

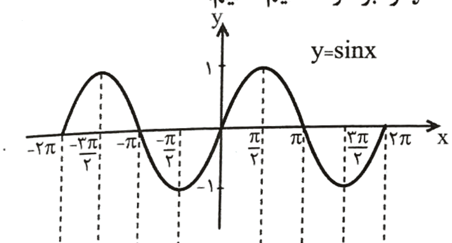


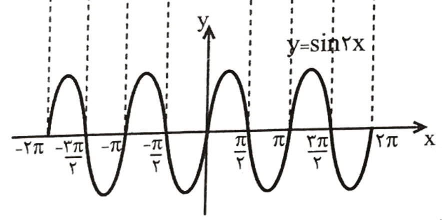


با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ پایین محور x هاست.

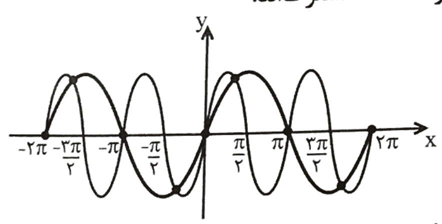
۱۲۸۰. گزینه‌ی ۲

با تقسیم طول نقاط برخورد نمودار تابع $y = \sin x$ با محور x ها بر a، طول نقاط برخورد نمودار تابع $y = \sin ax$ با محور x ها به دست می‌آید، پس: $a = 2$. نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sin 2x$ کافی است طول نقاط تابع $y = \sin x$ را بر دو تقسیم کنیم.





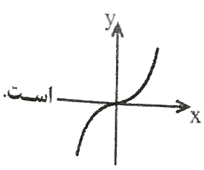
دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. همانطور که مشاهده می‌شود دو نمودار در ۹ نقطه مشترک‌اند.



توجه کنید که $a = -2$ نیز قابل قبول است که در این صورت نیز نمودارهای دو تابع $y = \sin x$ و $y = \sin(-2x)$ در بازه‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ در ۹ نقطه مشترک‌اند.

راهبرد حل تیپ (۴۰)

نمودار تابع درجه‌ی سوم $f(x) = x^3$ به شکل



است.

با استفاده از خواص انتقال می‌توانیم نمودار تابع $y = a(x+b)^3 + c$ را رسم کنیم. برای رسم آن ابتدا تابع $y = x^3$ را $|b|$ واحد به راست $(b < 0)$ و یا چپ $(b > 0)$ منتقل کرده و سپس عرض هر نقطه را a برابر کرده و در انتها نمودار حاصل را $|c|$ واحد به بالا $(c > 0)$ یا پایین $(c < 0)$ انتقال می‌دهیم.

۱۲۸۱. گزینه‌ی ۳

با توجه به اینکه $f(x)=x^۳+۳$، معادله‌ی $f(x)-۶=\frac{۸}{f(x)}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$x^۳+۳-۶=\frac{۸}{x^۳+۳}\xrightarrow{\times(x^۳+۳)}(x^۳+۳)(x^۳-۳)=۸$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(x^۳)^۲-۳^۲=۸\Rightarrow x^۶-۹=۸\Rightarrow x^۶=۱۷$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt[۶]{۱۷}\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=۰$$

۱۲۸۲. گزینه‌ی ۴

ابتدا تابع $f(x^۲)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$f(x^۲)=x^۲\sqrt{x^۲}=x^۲|x|$$

$$\Rightarrow g(x)=\sqrt{۱-f(x^۲)}=\sqrt{۱-x^۲|x|}$$

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد:

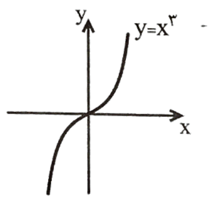
$$۱-x^۲|x|\geq ۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x\geq ۰: ۱-x^۲(x)\geq ۰\Rightarrow ۱-x^۳\geq ۰\\ \Rightarrow(۱-x)\underbrace{(x^۲+x+۱)}_{\text{همواره مثبت}}\geq ۰\Rightarrow ۱-x\geq ۰\\ \Rightarrow x\leq ۱\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط } x\geq ۰}۰\leq x\leq ۱\quad (I)\\ x<۰: ۱-x^۲(-x)\geq ۰\Rightarrow ۱+x^۳\geq ۰\\ \Rightarrow(۱+x)\underbrace{(x^۲-x+۱)}_{\text{همواره مثبت}}\geq ۰\Rightarrow ۱+x\geq ۰\\ \Rightarrow x\geq -۱\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط } x<۰}-۱\leq x<۰\quad (II)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I)\cup(II)}D_g=[-۱,۱]$$

۱۲۸۳. گزینه‌ی ۳

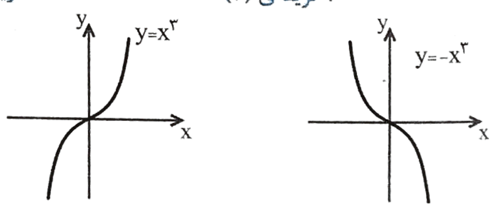
نمودار تابع $f(x)=x^۳$ به صورت مقابل است که نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.



۱۲۸۴. گزینه‌ی ۴

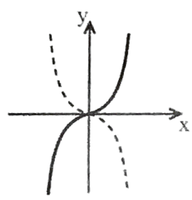
نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): گزینه‌ی (۲):



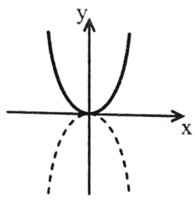
گزینه‌ی (۳): ابتدا تابع $y=x|x|$ را به صورت چندضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$y=x|x|=\begin{cases}x(x)=x^۲ & x\geq ۰\\ x(-x)=-x^۲ & x<۰\end{cases}$$



گزینه‌ی (۴): ابتدا تابع $y=x^۲|x|$ را به صورت چندضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

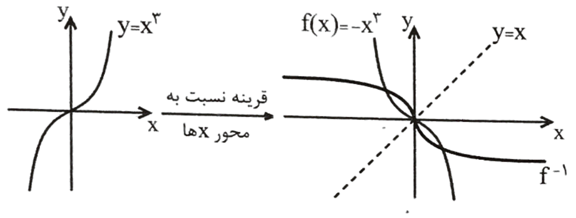
$$y=x^۲|x|=\begin{cases}x^۲(x)=x^۳ & x\geq ۰\\ x^۲(-x)=-x^۳ & x<۰\end{cases}$$



تابع گزینه‌ی (۴) یک به یک نیست، زیرا خطی موازی محور xها وجود دارد که نمودار تابع را در دو نقطه قطع کند.

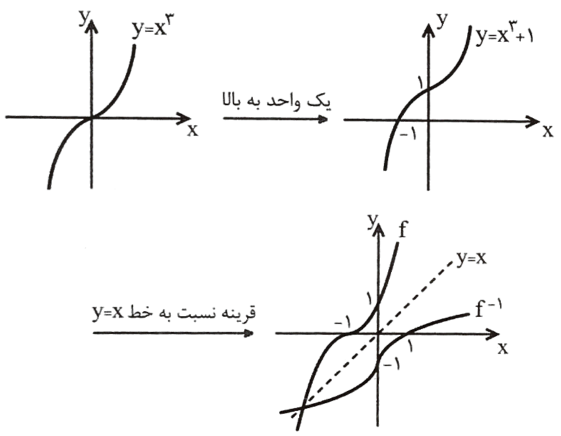
۱۲۸۵. گزینه‌ی ۴

نمودار تابع $f(x)=-x^۳$ را رسم کرده و سپس آن را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار وارون آن حاصل شود. برای رسم نمودار $y=-x^۳$ کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y=x^۳$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.



۱۲۸۶. گزینه‌ی ۳

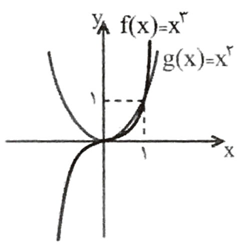
نمودار تابع $y=x^۳+۱$ را رسم کرده، سپس نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار وارون آن به دست آید.



همانطور که مشاهده می‌شود نمودار تابع $y=x^۳+۱$ وارون خود را در ناحیه‌ی سوم قطع می‌کند.

۱۲۸۷. گزینه‌ی ۲

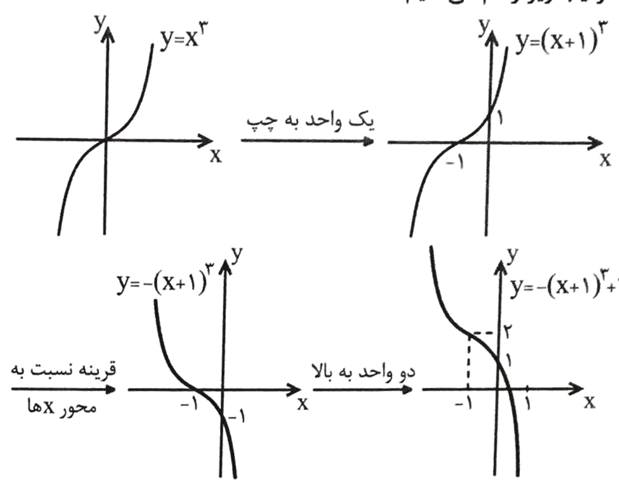
نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود دو تابع در نقطه‌ی $(۱,۱)$ متقاطع‌اند و به ازای $x\in(-\infty,۱)$ نمودار تابع $f(x)=x^۳$ بالای نمودار تابع $g(x)=x^۲$ قرار نمی‌گیرد، پس حداکثر مقدار a برابر با یک است.

۱۲۸۸. گزینه‌ی ۱

نمودار تابع $y=2-(x+1)^3$ را با استفاده از نمودار تابع $y=x^3$ به‌ترتیب زیر رسم می‌کنیم.



توجه کنید که محل تلاقی تابع با محور xها که با حل معادله‌ی $y=0$ به‌دست می‌آید برابر با $\sqrt[3]{2}-1$ است که از یک کوچکتر است.

$$y=0 \Rightarrow 2-(x+1)^3=0 \Rightarrow (x+1)^3=2$$
$$\Rightarrow x+1=\sqrt[3]{2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{2}-1<1$$

۱۲۸۹. گزینه‌ی ۱

ضابطه‌ی تابع g را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x)=x^3+3x^2+3x+1-1=(x+1)^3-1$$

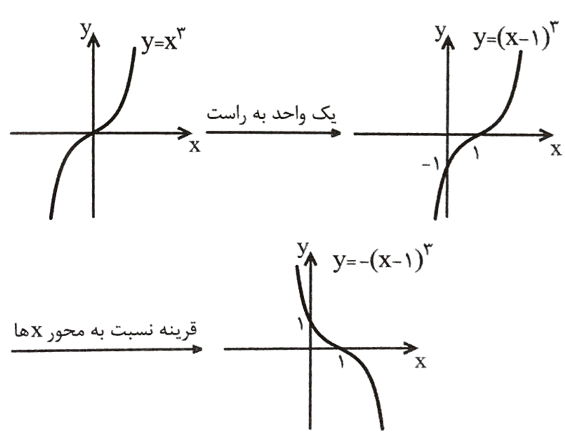
بنابراین اگر نمودار تابع $f(x)=x^3$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=f(x+1)-1$ حاصل می‌شود. بنابراین از طول هر نقطه یک واحد کم شده و از عرض هر نقطه نیز یک واحد کم می‌شود، پس خواهیم داشت:

$$f(2)=2^3=8$$
$$A(2,8)\xrightarrow{g(x)=f(x+1)-1}A'(2-1,8-1)=(1,7)$$

پس نقطه‌ی $(2,8)$ روی نمودار تابع f به نقطه‌ی $(1,7)$ روی نمودار تابع g تبدیل می‌شود.

۱۲۹۰. گزینه‌ی ۳

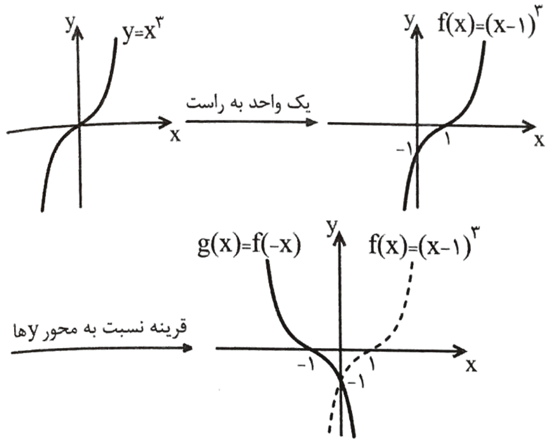
نمودار تابع $f(x)=-(x-1)^3+a$ را به کمک انتقال نمودار تابع $y=x^3$ رسم می‌کنیم.



اگر $a\ge 0$ باشد، نمودار a واحد به بالا منتقل می‌شود و از ناحیه‌ی سوم عبور نخواهد کرد. اگر $a<0$ باشد و نمودار حداکثر تا یک واحد به پایین منتقل شود، از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند، پس حدود a به صورت $a\ge -1$ خواهد بود.

۱۲۹۱. گزینه‌ی ۱

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم کرده و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $g(x)=f(-x)$ حاصل شود.

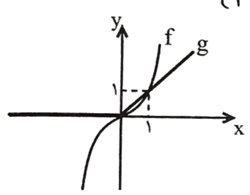


۱۲۹۲. گزینه‌ی ۳

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع g، ابتدا آن را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+x)=x & x\ge 0\\ \frac{1}{2}(x+(-x))=0 & x<0\end{cases}$$

دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه به طول ۰ و ۱ قطع می‌کنند.

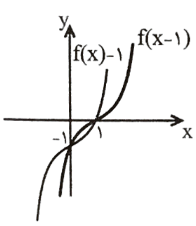


با توجه به نمودار، تابع f به ازای $x\in[1,+\infty)\cup\{0\}$ پایین نمودار تابع g نیست.

۱۲۹۳. گزینه‌ی ۲

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و تعداد نقاط تلاقی آنها را می‌یابیم.

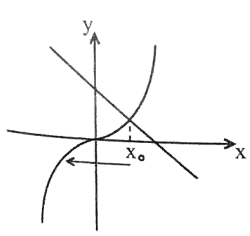
برای رسم نمودار تابع $f(x-1)$ نمودار تابع $f(x)=x^3$ را یک واحد به راست و برای رسم نمودار تابع $f(x)-1$، نمودار تابع $f(x)=x^3$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود دو نمودار در دو نقطه به طول صفر و یک مشترک‌اند.

۱۲۹۴. گزینه‌ی ۱

با رسم نمودار دو تابع $y_1=3-2x$ و $y_2=x^3$، دیده می‌شود که دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه به‌طول x_0 قطع می‌کنند، لذا معادله‌ی:

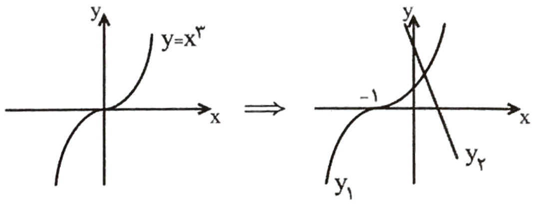


$$x^3=3-2x \to x^3+2x-3=0$$

تنها یک ریشه دارد. چون مجموع ضرایب این معادله صفر است، پس ریشه‌ی آن ۱ است در نتیجه $x_0=1$ و تابع $y=x^3$، در بازه‌ی $(-\infty,1)$ پایین خط $y=3-2x$ است. بنابراین بیشترین مقدار a برابر یک است.

۱۲۹۵. **گزینه‌ی ۱**

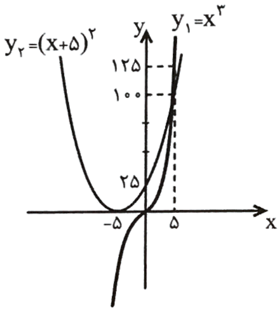
نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $f(x)=(x+۱)^۳$ کافی است نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد در راستای محور xها به چپ انتقال دهیم.



دیده می‌شود که خط و منحنی یکدیگر را در یک نقطه در ناحیه‌ی اول دستگاه مختصات قطع می‌کنند.

۱۲۹۶. **گزینه‌ی ۳**

ریشه‌های معادله‌ی $x^۳=(x+۵)^۲$، نقاط تلاقی نمودار دو تابع $y_۱=x^۳$ و $y_۲=(x+۵)^۲$ است. پس نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



دو نمودار در یک نقطه به طول مثبت تلاقی دارند، پس معادله دارای یک ریشه‌ی مثبت است.

۱۲۹۷. **گزینه‌ی ۱**

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس: $(x-۱)f(x)\geq ۰$. با توجه به نمودار تابع f، جدول تعیین علامت به صورت زیر خواهد بود:

x		−۱		۱	
$x-۱$	−		−	۰	+
$f(x)$	+	۰	−		−
$(x-۱)f(x)$	−	۰	+	۰	−

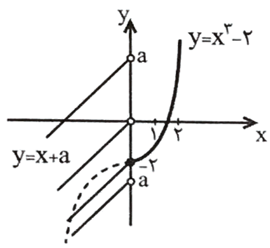
$$(x-۱)f(x)\geq ۰ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$
$$\Rightarrow D_g=[-۱,۱]$$

۱۲۹۸. **گزینه‌ی ۴**

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^۳-۲ & x\geq ۰ \\ x+a & x<۰ \end{cases}$$

برای رسم ضابطه‌ی بالایی تابع f، نمودار تابع $y=x^۳$ را دو واحد به پایین منتقل کرده، سپس قسمت چپ محور yها را حذف می‌کنیم.



با توجه به نمودار، برای آنکه برد تابع برابر با R شود، باید $a\geq -۲$ باشد، پس کمترین مقدار a برابر با -۲ است.

۱۲۹۹. **گزینه‌ی ۳**

ابتدا ضابطه‌ی تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y=(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)+۱=(x-۱)^۳+۱$$

حال x را برحسب y نوشته و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم تا وارون تابع به دست آید:

$$y=(x-۱)^۳+۱\Rightarrow y-۱=(x-۱)^۳\Rightarrow \sqrt[۳]{y-۱}=x-۱$$
$$\Rightarrow x=۱+\sqrt[۳]{y-۱}\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y=۱+\sqrt[۳]{x-۱}$$

۱۳۰۰. **گزینه‌ی ۲**

ابتدا x را بر حسب y نوشته و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y=(x+۱)^۳\Rightarrow \sqrt[۳]{y}=x+۱\xrightarrow[y\leq ۰]{x\leq -۱} x=\sqrt[۳]{y}-۱$$
$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y=\sqrt[۳]{x}-۱\,,\ x\leq ۰$$

راهبرد حل تیپ (۴۱)

تابع f روی یک بازه با حرکت روی نمودار از چپ به راست:

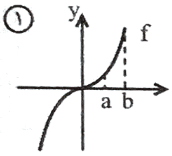
۱) اکیداً صعودی است هرگاه همواره رو به بالا حرکت کنیم. (شکل‌های ۱ و ۲)

۲) صعودی است هرگاه رو به پایین حرکت نکنیم. (شکل ۳)

۳) اکیداً نزولی است هرگاه همواره رو به پایین حرکت کنیم. (شکل‌های ۴ و ۵)

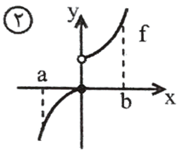
۴) نزولی است هرگاه رو به بالا حرکت نکنیم. (شکل ۶)

به زبان ریاضی اگر $a,b\in I$ (I یک بازه) و $a<b$ آنگاه:

۱


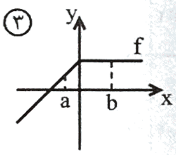
$f(a)<f(b)$

اکیداً صعودی

۲


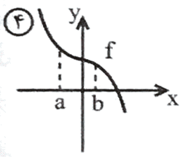
$f(a)<f(b)$

اکیداً صعودی

۳


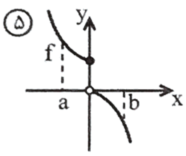
$f(a)\leq f(b)$

صعودی غیراکید

۴


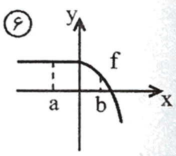
$f(a)>f(b)$

اکیداً نزولی

۵


$f(a)>f(b)$

اکیداً نزولی

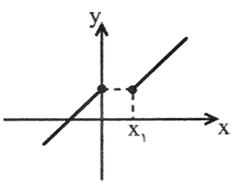
۶


$f(a)\geq f(b)$

نزولی غیراکید

۱۳۰۱. **گزینه‌ی ۲**

نمودار تابع گزینه‌های (۱) و (۳) اکیداً صعودی‌اند زیرا با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت. نمودار تابع گزینه‌ی (۴) نه صعودی است نه نزولی.



نمودار تابع گزینه‌ی (۲) صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست زیرا با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت.

۱۳۰۲. **گزینه‌ی ۳**

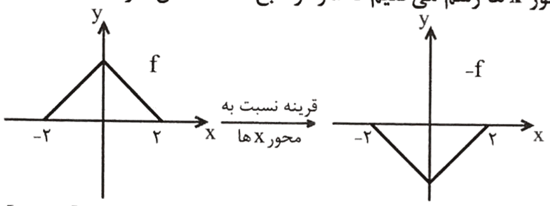
گزینه‌ی (۳) نادرست است زیرا در بازه‌ی $[۳,۴)$ با حرکت روی نمودار از چپ به راست همواره رو به بالا خواهیم رفت، ولی در نقطه‌ی $x=۴$ رو به پایین می‌رویم، پس در بازه‌ی $[۳,۴]$ تابع نه صعودی است و نه نزولی.

۱۳۰۳. گزینه‌ی ۱

تابع f برای x های بزرگتر از صفر، بزرگتر از ۲ است و برای x های کوچکتر از صفر، کوچکتر از ۳- است، پس اگر $f(0)$ بین دو عدد ۲ و ۳- قرار داشته باشد، آنگاه با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به بالا خواهیم رفت و تابع f اکیداً صعودی خواهد بود، پس $-3 \le f(0) \le 2$.

۱۳۰۴. گزینه‌ی ۱

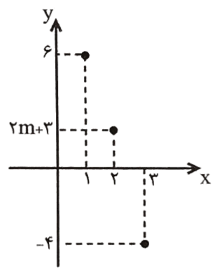
می‌توان تابع f را به صورت زیر در نظر گرفت که نسبت به محور y ها متقارن است و در بازه‌ی $[0,2]$ اکیداً نزولی است. قرینه‌ی آن را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $-f$ حاصل شود:



همانطور که مشاهده می‌شود تابع $-f$ در بازه‌ی $[-2,0]$ اکیداً نزولی است.

۱۳۰۵. گزینه‌ی ۳

نمایش نموداری تابع f به صورت زیر است. برای اینکه تابع f اکیداً نزولی باشد، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، باید همواره به سمت پایین حرکت کنیم، بنابراین با توجه به نمودار، مقدار تابع در نقطه‌ی ۲ یعنی $2m+3$ باید بین دو عدد ۶ و ۴- قرار گیرد.



$$-4<2m+3<6 \Rightarrow -7<2m<3 \Rightarrow -3/5<m<1/5$$

پس پنج عدد صحیح از ۳- تا ۱ در محدوده‌ی m قرار می‌گیرند.

۱۳۰۶. گزینه‌ی ۱

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم.

$g=\{(5,6),(4,5),(2,1),(3,a)\}$ و $f(x)=2^{-x}$

$$x=5:(fog)(5)=f(g(5))=f(6)=2^{-6}\rightarrow(5,2^{-6})\in fog$$

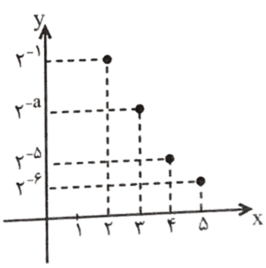
$$x=4:(fog)(4)=f(g(4))=f(5)=2^{-5}\rightarrow(4,2^{-5})\in fog$$

$$x=2:(fog)(2)=f(g(2))=f(1)=2^{-1}\rightarrow(2,2^{-1})\in fog$$

$$x=3:(fog)(3)=f(g(3))=f(a)=2^{-a}\rightarrow(3,2^{-a})\in fog$$

$$\Rightarrow fog=\{(2,2^{-1}),(3,2^{-a}),(4,2^{-5}),(5,2^{-6})\}$$

نمایش نموداری تابع fog به صورت زیر است. برای اینکه تابع fog نزولی باشد، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، باید به سمت بالا حرکت نکنیم، بنابراین با توجه به نمودار، مقدار تابع در نقطه‌ی ۳ یعنی 2^{-a} باید بین دو عدد 2^{-1} و 2^{-5} قرار گیرد.

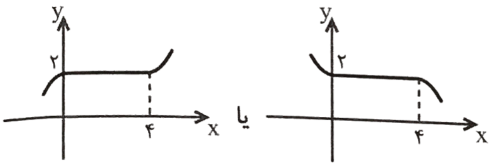


$$-5\le -a\le -1 \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض نمی‌شود}]{\text{پایه بزرگتر از یک}} 2^{-5}\le 2^{-a}\le 2^{-1}$$

$\Rightarrow 1\le a\le 5 \Rightarrow$ حداکثر مقدار $a=5$

۱۳۰۷. گزینه‌ی ۳

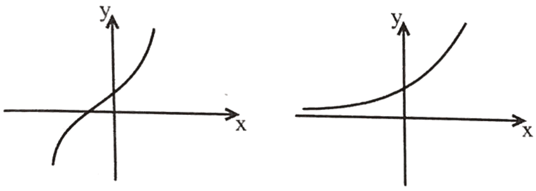
تابع f پیوسته و یکنواست و از آنجا که $f(0)=f(4)=2$ پس در بازه‌ی صفر تا ۴، مقدار تابع ثابت است زیرا در غیر این صورت یکنوا نخواهد بود.



بنابراین جواب معادله‌ی $f(x)-2=0$ یا $f(x)=2$ بازه‌ی $[0,4]$ است که بی‌شمار عضو دارد.

۱۳۰۸. گزینه‌ی ۱

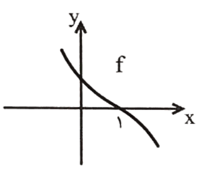
اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، محور x ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. به شکل‌های زیر توجه کنید.



۱۳۰۹. گزینه‌ی ۴

چون تابع f پیوسته و اکیداً نزولی است و $f(1)=0$، بنابراین نمودار آن می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} x\ge 1\rightarrow f(x)\le 0\\ x<1\rightarrow f(x)>0\end{cases}$$



جدول تعیین علامت $xf(x)$ به صورت زیر است:

x		۰		۱	
x	−	۰	+		+
f(x)	+		+	۰	−
xf(x)	−	۰	+	۰	−

دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}:xf(x)\ge 0\Rightarrow [0,1]$ است.

۱۳۱۰. گزینه‌ی ۱

طبق تعریف تابع اکیداً نزولی داریم: $x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$، بنابراین:

$$f(2a^2+3a+7)<f(3a^2+2a-5)$$

$$\xrightarrow{\text{نزولی } f} 2a^2+3a+7>3a^2+2a-5$$

$$\Rightarrow a^2-a-12<0 \Rightarrow (a-4)(a+3)<0 \Rightarrow -3<a<4$$

بنابراین کمترین مقدار صحیح a برابر با ۲- است.

راهبرد حل تیپ (۴۲)

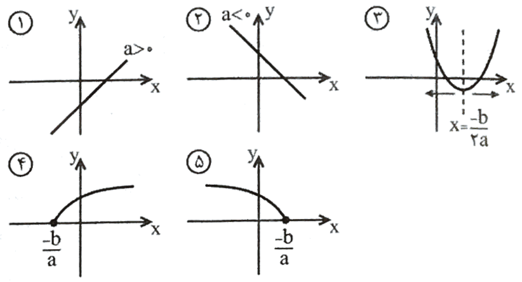
با رسم نمودار یک تابع، می‌توان در مورد یکنوایی آن نظر داد. از میان توابع شناخته شده:

① توابع خطی به شکل $f(x)=ax+b$، اگر $a>0$ اکیداً صعودی و اگر $a<0$ اکیداً نزولی‌اند. (شکل‌های ۱ و ۲).

② تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، در هر یک از بازه‌های $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ و $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ اکیداً یکنواست ولی در R غیریکنواست. (شکل ۳)

③ تابع $f(x)=\sqrt{ax+b}$، اگر $a>0$، اکیداً صعودی و اگر $a<0$، اکیداً نزولی است. (شکل‌های ۴ و ۵)

④ توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ غیریکنوا هستند.



⑤ تابع نمایی $y=a^x$، اگر $a>1$ اکیداً صعودی و اگر $0<a<1$ اکیداً نزولی است.

⑥ تابع لگاریتمی $y=\log_a x$، اگر $a>1$ اکیداً صعودی و اگر $0<a<1$ اکیداً نزولی است.

۱۳۱۱. گزینه‌ی ۴

با توجه به اینکه تابع خطی $f(x)=ax+b$ نزولی است، پس $a<0$.
تابع $f(ax+b)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b \\ f(ax+b)=4x+1 \end{cases}$$

با متحد قرار دادن طرف راست معادله‌های بالا، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a^2=4 \xrightarrow{a<0} a=-2 \\ ab+b=1 \xrightarrow{a=-2} -2b+b=1 \Rightarrow b=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-2x-1 \Rightarrow f(1)=-2-1=-3$$

۱۳۱۲. گزینه‌ی ۱

دامنه: $|x-1|<2$

چون طرفین نامعادله نامنفی هستند می‌توانیم به توان ۲ برسانیم:

$$\Rightarrow (x-1)^2<4$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1<4 \Rightarrow x^2-2x-3<0 \Rightarrow f(x)<0$$

بنابراین تابع f همواره منفی است. محور تقارن تابع f، $x=1$ است؛ با توجه به دامنه که بازه‌ی $(-1,3)$ است، تابع ابتدا نزولی و بعد صعودی است.

۱۳۱۳. گزینه‌ی ۲

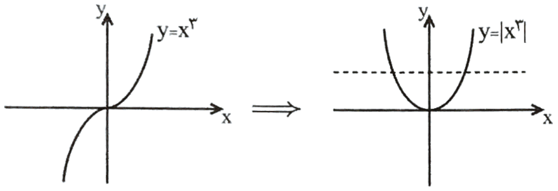
در تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$، اگر $a>0$ باشد، تابع در بازه‌ی $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ (و هر زیرمجموعه‌ای از این بازه) صعودی و اگر $a<0$ باشد، در بازه‌ی $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ (و هر زیرمجموعه‌ای از این بازه) صعودی است. بنابراین برای اینکه تابع $y=(a-4)x^2-x$ در بازه‌ی $[2,+\infty)$ صعودی باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} (1)\ \text{ضریب } x^2>0 \Rightarrow a-4>0 \Rightarrow a>4 \quad (I) \\ (2)\ \frac{-b}{2a}\le 2 \Rightarrow \frac{-(-1)}{2(a-4)}\le 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a-4)\ge\frac{1}{2} \Rightarrow a-4\ge\frac{1}{4} \Rightarrow a\ge\frac{17}{4} \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) داریم: $a\ge\frac{17}{4}$.

۱۳۱۴. گزینه‌ی ۳

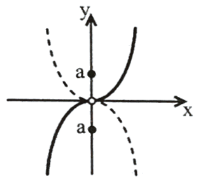


همانطور که در شکل ملاحظه می‌شود خط‌هایی به معادله‌ی $y=k>0$، نمودار تابع $f(x)=|x^3|$ را در دو نقطه قطع می‌کنند. بنابراین تابع f غیر یک به یک و در نتیجه وارون‌ناپذیر است.

۱۳۱۵. گزینه‌ی ۱

ضابطه‌ی تابع را به صورت زیر نوشته و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x|x| & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}=\begin{cases} x(x)=x^2 & , \quad x>0 \\ x(-x)=-x^2 & , \quad x<0 \\ a & , \quad x=0 \end{cases}$$

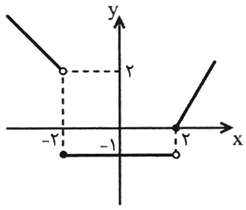


با توجه به نمودار، برای اینکه تابع صعودی باشد، a فقط می‌تواند صفر باشد.

۱۳۱۶. گزینه‌ی ۲

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} -x & , \quad x<-2 \\ -1 & , \quad -2\le x<2 \\ 2x-4 & , \quad x\ge 2 \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $(-\infty,-2]$ نزولی است، بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تابع f در بازه‌ی $[-2,2)$ ثابت است و در نقطه‌ی $x=2$ افزایش می‌یابد، پس تابع f در بازه‌ی $[-2,2]$ صعودی است، بنابراین گزینه‌ی (۲) نادرست است.

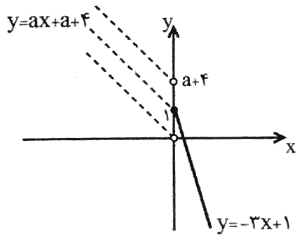
تابع f در بازه‌ی $[0,+\infty)$ صعودی است، پس یکنواست، بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

تابع f در بازه‌ی $[2,+\infty)$ صعودی است، بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

۱۳۱۷. گزینه‌ی ۳

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} -3x+1 & , \quad x\ge 0 \\ ax+a+4 & , \quad x<0 \end{cases}$$



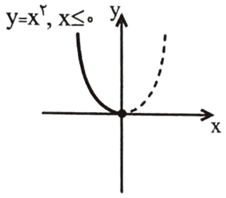
با توجه به نمودار، برای آنکه تابع در تمام دامنه‌اش اکیداً نزولی باشد، باید شیب خط $y=ax+a+4$ منفی باشد و عرض از مبدأ آن نیز بزرگ‌تر یا مساوی یک باشد.

بنابراین:

$$\begin{cases} \text{شیب} < ۰ \Rightarrow a < ۰ \\ \text{عرض از مبدأ} \geq ۱ \xrightarrow[y \geq ۱]{x=۰} a + ۴ \geq ۱ \Rightarrow a \geq -۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۳ \leq a < ۰$$

۱۳۱۸. گزینه‌ی ۳

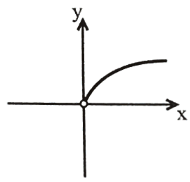
با توجه به اینکه ضابطه‌ی بالایی تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \leq ۰ \\ g(x) & x > ۰ \end{cases}$ در دامنه‌ی خود نزولی است (به نمودار زیر توجه کنید)،



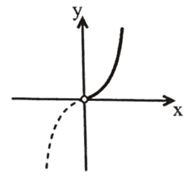
تابع g نیز باید در دامنه‌ی $x > ۰$ نزولی باشد و همچنین مقادیر آن کوچکتر یا مساوی صفر باشد تا تابع f در R نزولی باشد.

نمودار هریک از گزینه‌ها را برای $x > ۰$ رسم می‌کنیم:

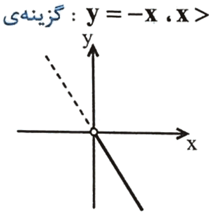
گزینه‌ی (۱): $y = \sqrt{x}$ ، $x > ۰$



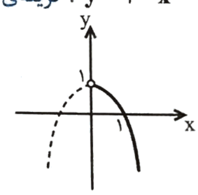
گزینه‌ی (۲): $y = x^۳$ ، $x > ۰$



گزینه‌ی (۳): $y = -x$ ، $x > ۰$



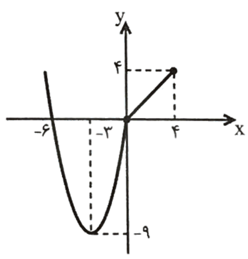
گزینه‌ی (۴): $y = ۱ - x^۲$



با توجه به نمودارها، تنها تابع گزینه‌ی (۳) در دامنه‌ی $x > ۰$ نزولی و مقادیر آن کوچکتر یا مساوی صفر است، بنابراین: $g(x) = -x$.
توجه کنید که تابع گزینه‌ی (۴) نیز در دامنه‌ی $x > ۰$ نزولی است ولی مقادیر آن کوچکتر از یک است، بنابراین نمی‌تواند تابع g باشد.

۱۳۱۹. گزینه‌ی ۳

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x & ۰ \leq x \leq ۴ \\ x(x+۶) & x < ۰ \end{cases}$ را رسم می‌کنیم.



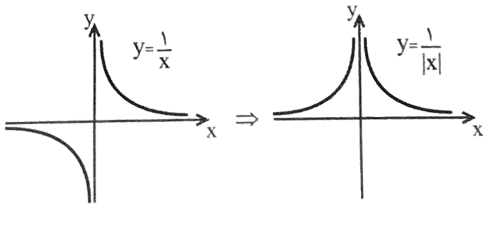
با توجه به نمودار، بزرگترین بازه‌ای که تابع f در آن صعودی است بازه‌ی $[-۳ , ۴]$ است.

بنابراین:

$$a = -۳ , b = ۴ \Rightarrow b - a = ۴ - (-۳) = ۷$$

۱۳۲۰. گزینه‌ی ۴

نمودار تابع $f(x) = \frac{۱}{|x|}$ به صورت زیر است:



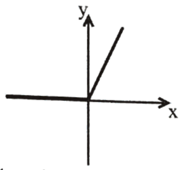
رابطه‌ی $x_۱ < x_۲ \Leftrightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$ نشان می‌دهد که تابع در بازه‌ی شامل $x_۱$ و $x_۲$ اکیداً نزولی است. با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $(۰ , +\infty)$ اکیداً نزولی است و در هر زیرمجموعه‌ای از این بازه نیز اکیداً نزولی خواهد بود. تنها گزینه‌ی (۴) یعنی بازه‌ی $(۰ , ۱)$ زیرمجموعه‌ی این بازه است.

۱۳۲۱. گزینه‌ی ۳

ابتدا هر یک از توابع را به صورت دو ضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آنها را رسم کرده و با توجه به نمودار صعودی یا نزولی بودن آنها را مشخص می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱):

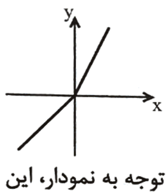
$$y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & , \ x \geq ۰ \\ ۰ & , \ x < ۰ \end{cases}$$



با توجه به نمودار، این تابع صعودی است.

گزینه‌ی (۲):

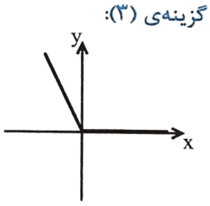
$$y = ۲x + |x| = \begin{cases} ۳x & , \ x \geq ۰ \\ x & , \ x < ۰ \end{cases}$$



با توجه به نمودار، این تابع صعودی است.

گزینه‌ی (۳):

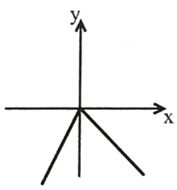
$$y = |x| - x = \begin{cases} ۰ & , \ x \geq ۰ \\ -۲x & , \ x < ۰ \end{cases}$$



با توجه به نمودار، این تابع نزولی است.

گزینه‌ی (۴):

$$y = x - ۲|x| = \begin{cases} -x & , \ x \geq ۰ \\ ۳x & , \ x < ۰ \end{cases}$$

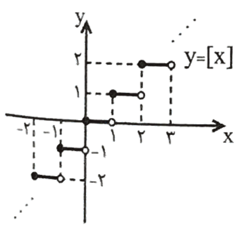


با توجه به نمودار، این تابع نه صعودی است نه نزولی (غیریکنواست).

۱۳۲۲. گزینه‌ی ۳

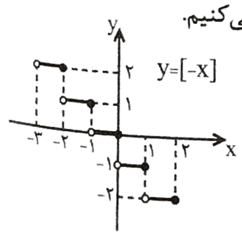
نمودار هر یک از توابع را رسم کرده و یکنوایی آنها را تعیین می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱):



با توجه به نمودار، تابع $y = [x]$ صعودی است، پس یکنواست.

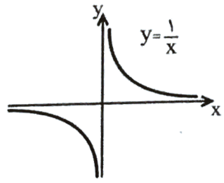
گزینه‌ی (۲): برای رسم نمودار تابع $y = [-x]$، قرینه‌ی نمودار $y = [x]$ را نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار، تابع $y = [-x]$ نزولی است، پس یکنواست.

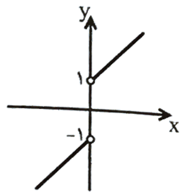
گزینه‌ی (۳):

با توجه به نمودار، تابع $y=\frac{۱}{x}$ در دامنه‌ی خود یعنی $R-\{۰\}$ غیریکنواست.



گزینه‌ی (۴):

$$y=x+\frac{|x|}{x}=\begin{cases}x+\frac{x}{x}=x+۱ & x>۰\\ x+\frac{-x}{x}=x-۱ & x<۰\end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع $y=x+\frac{|x|}{x}$ صعودی است، پس یکنواست.

۱۳۲۳. گزینه‌ی ۱

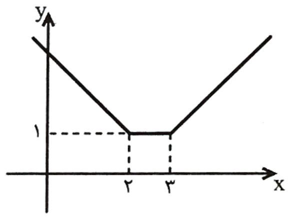
تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=x+|x-۲|=\begin{cases}x+(x-۲)=۲x-۲ & , \quad x\geq ۲\\ x-(x-۲)=۲ & , \quad x<۲\end{cases}$$

از آنجا که تابع ثابت، هم صعودی و هم نزولی است، پس تابع f در بازه‌ی $(-\infty, ۲)$ که تابعی ثابت است، هم نزولی است و هم صعودی.

۱۳۲۴. گزینه‌ی ۱

نمودار تابع $f(x)=|x-۲|+|x-۳|$ به صورت زیر است.



ملاحظه می‌شود که این تابع به ازای $x<۲$ اکیداً نزولی است که در این صورت عبارت‌های داخل هر دو قدر مطلق منفی هستند.

بنابراین: $x<۲: f(x)=-(x-۲)-(x-۳)=-۲x+۵$

حال باید بررسی کنیم معادله‌ی $\underbrace{۲x^۲-x-۱۰}_{g(x)}=\underbrace{-۲x+۵}_{f(x);x<۲}$ چند جواب در $x<۲$ دارد.

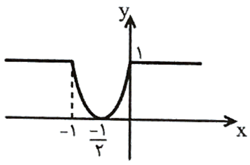
$$۲x^۲+x-۱۵=۰\Rightarrow(۲x-۵)(x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۵}{۲}>۲ & \times\\ x=-۳<۲ & \checkmark\end{cases}$$

۱۳۲۵. گزینه‌ی ۲

ابتدا تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}(-(x+۱)-(-x))^۲=۱ & , \quad x\leq -۱\\ (x+۱-(-x))=(۲x+۱)^۲ & , \quad -۱<x<۰\\ ((x+۱)-x)^۲=۱ & , \quad x\geq ۰\end{cases}$$

با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $(\frac{-۱}{۲}, ۰)$ اکیداً صعودی است.



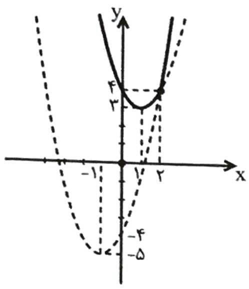
۱۳۲۶. گزینه‌ی ۲

تابع $f(x)=x^۲+۲|x-۲|$ را با تعیین علامت قدرمطلق به صورت چندضابطه‌ای نوشته و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+۲(x-۲)=x^۲+۲x-۴ & , \quad x\geq ۲\\ x^۲+۲(-(x-۲))=x^۲-۲x+۴ & , \quad x<۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x+۱)^۲-۵ & , \quad x\geq ۲\\ (x-۱)^۲+۳ & , \quad x<۲\end{cases}$$

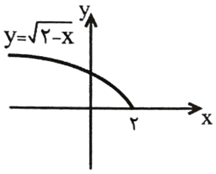
با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $[۱, +\infty)$ صعودی است، بنابراین در بازه‌ی $(۱, +\infty)$ نیز صعودی است.



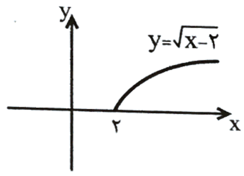
۱۳۲۷. گزینه‌ی ۲

نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

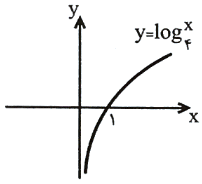
گزینه‌ی (۲):



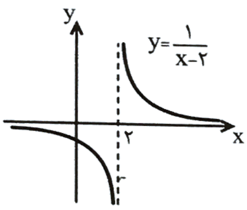
گزینه‌ی (۱):



گزینه‌ی (۴):



گزینه‌ی (۳):



با توجه به نمودارها، تابع گزینه‌ی (۲) نزولی است. دقت کنید تابع گزینه‌ی (۳) در دامنه‌ی خود غیریکنواست.

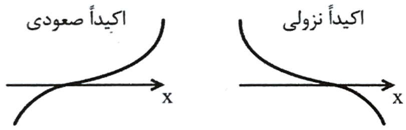
راهبرد حل تیپ (۴۳)

① هر تابع اکیداً یکنوا، تابعی یک به یک است ولی عکس آن همواره درست نیست. بنابراین هر تابع اکیداً یکنوا، وارون‌پذیر است.

② اگر تابعی اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشد، وارون آن نیز تابعی اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) است.

۱۳۲۸. گزینه‌ی ۲

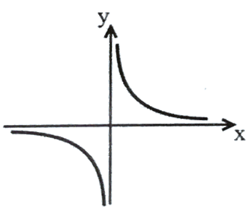
الف) اگر تابع f اکیداً یکنوا باشد یعنی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، می‌توان نمودار آن را به صورت زیر در نظر گرفت:



از آنجا که هر خط موازی محور xها، نمودار تابع f را (در هر دو حالت) حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع f یک به یک است.

ب) تابع یک به یک زیر را در نظر بگیرید:

این تابع در بازه‌های $(۰, +\infty)$ و $(-\infty, ۰)$ نزولی است ولی در دامنه‌ی خود یعنی $R-\{۰\}$، غیریکنواست.



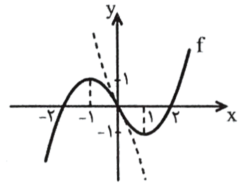
پس فقط مورد (الف) همواره درست است.

۱۳۲۹. گزینه‌ی ۳

تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و نمودار آن را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=x|x|-2x$$
$$=\begin{cases} x(x)-2x=x^2-2x=(x-1)^2-1 & , \ x\geq 0 \\ x(-x)-2x=-x^2-2x=-(x+1)^2+1 & , \ x<0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $[-1,1]$ یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است و نزولی نیز هست.



۱۳۳۰. گزینه‌ی ۳

هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه‌ی (۱): ابتدا تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=|x|-3x=\begin{cases} x-3x=-2x & , \ x\geq 0 \\ -(x)-3x=-4x & , \ x<0 \end{cases}$$

از آنجا که هر دو ضابطه، خط با شیب منفی هستند، پس تابع نزولی است، پس وارون آن نیز نزولی است.

گزینه‌ی (۲): $y=5-2x$

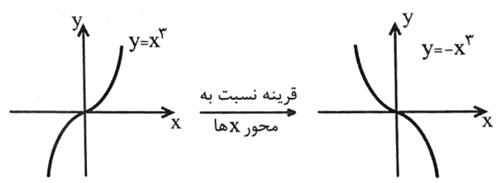
تابع خطی با شیب منفی، نزولی است، پس وارون آن نیز نزولی است.

گزینه‌ی (۳): ابتدا تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=4x-|x|=\begin{cases} 4x-x=3x & , \ x\geq 0 \\ 4x-(-x)=5x & , \ x<0 \end{cases}$$

هر دو ضابطه، خط با شیب مثبت هستند، پس تابع صعودی است، پس وارون آن نیز صعودی است.

گزینه‌ی (۴):



تابع نزولی است، پس وارون آن نیز نزولی است.

۱۳۳۱. گزینه‌ی ۳

با توجه به ریشه‌های داخل هر قدر مطلق، تابع f را بعد از تعیین علامت عبارت‌های داخل قدر مطلق بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} -2x+6+x+1 & x<-1 \\ -2x+6-x-1 & -1\leq x\leq 3 \\ 2x-6-x-1 & x>3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -x+7 & , \ x<-1 \\ -3x+5 & , \ -1\leq x\leq 3 \\ x-7 & , \ x>3 \end{cases}$$

با توجه به شیب خط‌های حاصل، تابع f در فاصله‌ی $x>3$ صعودی است (ضریب x مثبت است). پس ضابطه‌ی معکوس را در این فاصله می‌یابیم:

$f(x)=x-7$ و $x>3$

$y=x-7\Rightarrow x=y+7\Rightarrow$ تابع معکوس : $y=x+7$

دامنه‌ی تابع معکوس که همان برد تابع f است به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$x>3\Rightarrow x-7>-4\Rightarrow$ دامنه‌ی f^{-1} : $x>-4$

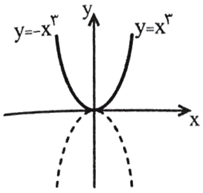
پس ضابطه‌ی معکوس عبارتست از:

$y=x+7$ و $x>-4$

۱۳۳۲. گزینه‌ی ۱

تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و نمودار آن را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=x^2|x|=\begin{cases} x^2(x)=x^3 & , \ x\geq 0 \\ x^2(-x)=-x^3 & , \ x<0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $(-\infty,0]$ نزولی است و ضابطه‌ی آن در این بازه به صورت $y=-x^3$ است که وارون آن برابر است با:

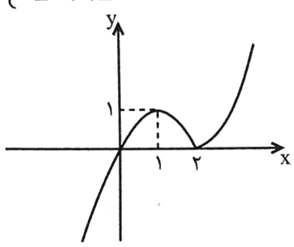
$$y=-x^3\Rightarrow x^3=-y\xrightarrow[y\geq 0]{x\leq 0}x=-\sqrt[3]{y}$$

$$\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y}y=-\sqrt[3]{x}\ ,\ x\geq 0$$

۱۳۳۳. گزینه‌ی ۳

تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و آن را رسم می‌کنیم.

$$y=x|x-2|=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 2 \\ -x^2+2x & x<2 \end{cases}$$



تابع در بازه‌ی $1<x<2$ نزولی است که برد آن در این فاصله، $0<y<1$ خواهد بود. پس دامنه‌ی تابع معکوس آن در این فاصله، $0<x<1$ است که مربوط به ضابطه‌ی $y=-x^2+2x$ می‌باشد.

$$y=-x^2+2x\Rightarrow -y=x^2-2x$$
$$\Rightarrow 1-y=x^2-2x+1\Rightarrow (x-1)^2=1-y$$
$$\Rightarrow |x-1|=\sqrt{1-y}\xrightarrow{1<x<2}x-1=\sqrt{1-y}$$
$$\Rightarrow x=1+\sqrt{1-y}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}\quad (0<x<1)$$

راهبرد حل تیپ (۴۴)

برای تعیین وضعیت یکنوایی یک تابع باید با در نظر گرفتن $a<b$، $f(a)$ و $f(b)$ را تشکیل داده و با مقایسه‌ی آنها تعیین کنیم $f(a)$ $\leq$، $<$، $\geq$ یا $>$ از $f(b)$ است و از آنجا وضعیت یکنوایی را مشخص کنیم.

به عنوان مثال، برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با دامنه‌ی $[0,+\infty)$ داریم:

$$0<a<b\Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}\Rightarrow f(a)<f(b)$$

پس f اکیداً صعودی است.

۱۳۳۴. گزینه‌ی ۱

توابع f و g اکیداً نزولی‌اند، پس طبق تعریف داریم:

$$\begin{cases} x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \\ x_1<x_2\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2) \end{cases}$$

برای تابع گزینه‌ی (۱) داریم:

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین نامعادله}}f(x_1)+g(x_1)>f(x_2)+g(x_2)$$

$\Rightarrow$ تابع $f+g$ نزولی است.

برای توابع بقیه‌ی گزینه‌ها، نمی‌توان در مورد یکنوایی آنها نظر قطعی داد.

۱۳۳۵. گزینه‌ی ۲

تابع f اکیداً نزولی است پس اگر $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$.
حال برای هر گزینه به ازای $x_1 < x_2$، مقادیر تابع را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $\frac{-1}{f(x)}$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} f(x_1) > f(x_2)$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)} \xrightarrow{\times(-1)} \frac{-1}{f(x_1)} > \frac{-1}{f(x_2)}$$

تابع $\frac{-1}{f}$ اکیداً نزولی است.

گزینه‌ی (۲): $\frac{1}{f(x)}$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{1}{f(x_1)} < \frac{1}{f(x_2)}$$

تابع $\frac{1}{f}$ اکیداً صعودی است.

گزینه‌ی (۳): $f^3(x)$

$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{\text{به‌توان ۳}} f^3(x_1) > f^3(x_2)$$

تابع f^3 اکیداً نزولی است.

گزینه‌ی (۴): $\sqrt{f(x)}$

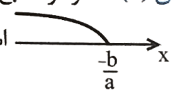
$$x_1 < x_2 \xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{f(x_1)} > \sqrt{f(x_2)}$$

تابع $\sqrt{f}$ اکیداً نزولی است.

۱۳۳۶. گزینه‌ی ۳

f تابع خطی غیرثابت و نزولی است، پس شیب آن منفی است و می‌توان آن را به صورت $f(x) = ax + b$، $a < 0$ در نظر گرفت. حال هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه‌ی (۱): نمودار تابع $y = \sqrt{f(x)} = \sqrt{ax+b}$ $(a<0)$ به صورت



است، لذا نزولی است.

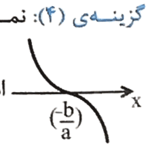
گزینه‌ی (۲): تابع $y = f^2(x) = (ax+b)^2$ نه صعودی و نه نزولی است.

گزینه‌ی (۳): تابع fof را تشکیل می‌دهیم:

$$f(f(x)) = f(ax+b) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$$

که یک تابع خطی با شیب مثبت a^2 است، پس صعودی است.

گزینه‌ی (۴): نمودار تابع $y = f^3(x) = (ax+b)^3$ به صورت



است، لذا نزولی است.

۱۳۳۷. گزینه‌ی ۲

اگر x_1 و x_2 را در بازه‌ی $[1, 2]$ به صورت زیر در نظر بگیریم، داریم:

$$1 \le x_1 \le x_2 \le 2 \xrightarrow[\text{f در بازه‌ی [1,2] صعودی است.}]{\text{اثر دادن f}}$$

$$f(1) \le f(x_1) \le f(x_2) \le f(2)$$

$$\Rightarrow 0 \le f(x_1) \le f(x_2) \le 1 \xrightarrow[\text{f در بازه‌ی [0,1] نزولی است.}]{\text{اثر دادن f}}$$

$$\Rightarrow f(0) \ge f(f(x_1)) \ge f(f(x_2)) \ge f(1)$$

بنابراین از نامساوی $x_1 \le x_2$ به نامساوی $f(f(x_1)) \ge f(f(x_2))$ رسیدیم، پس تابع $f(f(x))$ در فاصله‌ی $[1, 2]$ نزولی است.

۱۳۳۸. گزینه‌ی ۱

تابع $g(x) = x^2 - 1$, $x < 0$، اکیداً نزولی (علامت منفی) (نمودار آن را رسم کنید.) است و تابع $f(x) = -x^3$، اکیداً نزولی (علامت منفی) است، بنابراین ترکیب آن‌ها طبق نکته گفته شده در درس‌نامه، ضرب علامت‌ها مثبت است و تابع fog، تابعی صعودی است.

راهبرد حل تیپ (۴۵)

اگر f اکیداً صعودی باشد، با اثر دادن f بر $a < b$ جهت نامساوی عوض نمی‌شود و اگر f اکیداً نزولی باشد با اثر دادن f بر $a < b$ جهت نامساوی عوض می‌شود.

به عنوان مثال، $f(a) = a^x$ با شرط $0 < a < 1$ اکیداً نزولی است، پس:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

همچنین تابع $f(x) = \log_a^x$ با شرط $a > 1$ اکیداً صعودی است، پس:

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a^{x_1} < \log_a^{x_2}$$

۱۳۳۹. گزینه‌ی ۴

نامعادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم تا پایه‌های دو طرف برابر شوند:

$$(\sqrt{2})^{2x^2} \le (\tfrac{1}{2})^{2-3x} \Rightarrow (2^{\frac{1}{2}})^{2x^2} \le (2^{-1})^{2-3x}$$

$$\Rightarrow 2^{x^2} \le 2^{3x-2}$$

از آنجا که تابع نمایی $y = 2^x$ صعودی است، پس با برداشتن پایه‌ها، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$2^{x^2} \le 2^{3x-2} \Rightarrow x^2 \le 3x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 \le 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) \le 0 \Rightarrow 1 \le x \le 2$$

۱۳۴۰. گزینه‌ی ۲

از آنجا که تابع لگاریتم $y = \log_{0/1}^x$ نزولی است (زیرا پایه‌ی آن کوچکتر از یک است)، با برداشتن لگاریتم، جهت نامساوی عوض می‌شود، لذا:

$$\log_{0/1}^{(x-2)} \ge \log_{0/1}^{(6-x)} \Rightarrow x - 2 \le 6 - x$$

$$\Rightarrow 2x \le 8 \Rightarrow x \le 4 \quad (I)$$

از طرفی لگاریتم فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شود، پس داریم:

$$\begin{cases} x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ 6-x>0 \Rightarrow x<6 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 2<x<6 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) داریم: $2 < x \le 4$ که این بازه شامل دو عدد طبیعی ۳ و ۴ است.

راهبرد حل تیپ (۴۶)

الف) برای یافتن باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$ کافی است $R = f(a)$ را تشکیل دهیم. اگر $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه $f(a) = 0$.

ب) اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه $f(x)$ بر $x-a$ و $x-b$ بخش‌پذیر است و خواهیم داشت:

$f(a) = 0$ و $f(b) = 0$

پ) در حالت کلی برای یافتن باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ قابل قسمت بر $D(x)$، رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم، در این حالت داریم:

$$f(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

$Q(x)$ را خارج قسمت و $R(x)$ را که درجه‌ی آن از درجه‌ی مقسوم‌علیه کمتر است، باقی‌مانده‌ی تقسیم می‌نامیم. اگر $R(x) = 0$ باشد، چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $D(x)$ بخش‌پذیر است.

۱۳۴۱. گزینه‌ی ۲

راه حل اول: رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^4 - ax^3 + x^2 + 2ax + 1 = (x+1)Q(x) + 4$$

اگر در بالا، به جای x، قرار دهیم ۱-، a بدست می‌آید:

$$1 + a + 1 - 2a + 1 = 0 + 4 \Rightarrow a = -1$$

راه حل دوم: باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x+1$، برابر ۴ است، لذا:

$$f(-1) = 4 \to 1 + a + 1 - 2a + 1 = 4 \to -a = 1 \to a = -1$$

۱۳۴۲. گزینه‌ی ۲

ابتدا رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^4 + 4ax^2 + 2bx + 1 = (x^2 - 4)Q(x) + 0$$

مقدار عبارت به ازای $x = 2$ و $x = -2$ صفر خواهد بود:

$$x = 2 \to 16 + 16a + 4b + 1 = 0 \to 4a + b = \frac{-17}{4}$$

$$x = -2 \to 16 + 16a - 4b + 1 = 0 \to 4a - b = \frac{-17}{4}$$

از حل دستگاه بالا $b = 0$ و $a = \frac{-17}{16}$ بنابراین $a + b = \frac{-17}{16}$.

۱۳۴۳. گزینه‌ی ۳

رابطه‌ی تقسیم به صورت زیر است:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = (x^3 - x)Q(x)$$

مجموع ضرایب چندجمله‌ای به ازای $x = 1$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$f(1) = \overbrace{(1^3 - 1)}^{0}Q(x) = 0 \Rightarrow \text{مجموع ضرایب چندجمله‌ای} = 0$$

۱۳۴۴. گزینه‌ی ۳

چون عبارت درجه‌ی دوم بر $x - \alpha$ و $x - \beta$ بخش‌پذیر است، پس α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + px - 1 = 0$ هستند لذا:

$$4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$$

$$= (\alpha + \beta)^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 = (-p)^2 = p^2$$

۱۳۴۵. گزینه‌ی ۱

باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + x - 6$ یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی یک به صورت $ax + b$ است. بنابراین با نوشتن رابطه‌ی تقسیم داریم:

$$P(x) = \underbrace{(x^2 + x - 6)}_{(x-2)(x+3)}Q(x) + ax + b$$

از طرفی $P(2) = 1$ و $P(-3) = -4$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} P(2) = 2a + b = 1 \\ P(-3) = -3a + b = -4 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} a = 1 , b = -1$$

بنابراین باقیمانده‌ی تقسیم برابر با $x - 1$ است.

۱۳۴۶. گزینه‌ی ۱

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 3$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = -1$$

فرض می‌کنیم باقی‌مانده‌ی تقسیم $g(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ برابر $ax + b$ باشد، آن‌گاه:

$$x^2f(x) - 2x + 1 = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + (ax + b)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow f(1) - 2 + 1 = a + b \Rightarrow a + b = 2 \\ x = 2 \Rightarrow 4f(2) - 4 + 1 = 2a + b \Rightarrow 2a + b = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 11 \end{cases}$$

پس باقی‌مانده $R(x) = -9x + 11$ است.

۱۳۴۷. گزینه‌ی ۱

$$f(x) = (3x - 2)Q_1(x) - 1$$

$$g(x) = (3x - 2)Q_2(x) + 4$$

$$\Rightarrow f(x).g(x) = ((3x - 2)Q_1(x) - 1)((3x - 2)Q_2(x) + 4)$$

$$= (3x - 2)^2Q_1(x)Q_2(x) + 4(3x - 2)Q_1(x) - (3x - 2)Q_2(x) - 4$$

از $(3x - 2)$ فاکتور می‌گیریم:

$$= (3x - 2)\overbrace{((3x - 2)Q_1(x)Q_2(x) + 4Q_1(x) - Q_2(x))}^{Q(x)} - 4$$

$$\Rightarrow f(x).g(x) = (3x - 2)Q(x) - 4$$

بنابراین باقیمانده برابر با ۴- است.

۱۳۴۸. گزینه‌ی ۱

$$f(x) = (x^2 - x)Q(x) + x + 1$$

$$\Rightarrow xf(x) = (x^2 - x)Q'(x) + x^2 + x$$

چون درجه‌ی عبارت $x^2 + x$ با مقسوم‌علیه برابر است، باید در آن عامل مقسوم‌علیه را بسازیم:

$$xf(x) = (x^2 - x)Q'(x) + (x^2 - x) + 2x$$

$$= (x^2 - x)Q''(x) + 2x \Rightarrow R(x) = 2x$$

۱۳۴۹. گزینه‌ی ۲

$$f(x) = (x^2 - 16)Q(x) + (x + 2)$$

حال x را به x^4 تبدیل می‌کنیم:

$$f(x^4) = (x^8 - 16)Q(x^4) + (x^4 + 2)$$

$$= (x^4 - 4)(x^4 + 4)Q(x^4) + (x^4 + 2)$$

$$= (x^4 + 4)Q'(x) + x^4 + 2$$

حال کافی است به‌جای x^4 مقدار ۴- بگذاریم.

$$R = 0 + (-4) + 2 = -2$$

۱۳۵۰. گزینه‌ی ۱

$$f(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 + k$$

چون $f(x)$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر است، پس $f(-2) = 0$، خواهیم داشت:

$$f(-2) = (-2)^{2n+1} + 2(-2)^{2n} - 32 + 40 + k$$

$$= (-2)^{2n+1} - (-2)^{2n+1} - 32 + 40 + k = 8 + k$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow 8 + k = 0 \Rightarrow k = -8$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 1$، یک چندجمله‌ای به شکل $ax + b$، خواهد بود، رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^5 - 5x^3 - 8 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$$