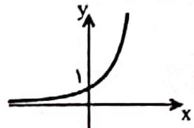
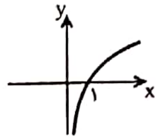
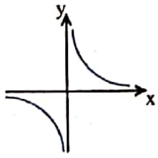
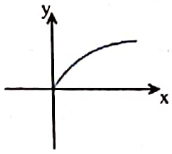
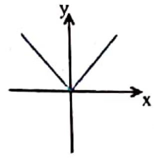
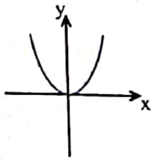
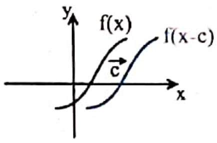
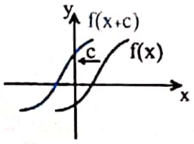
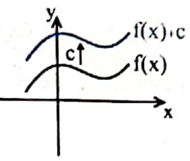
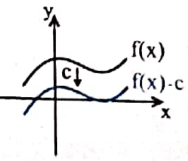
تبدیل نمودار توابع

درس‌نامه — انتقال‌های افقی و عمودی

با به‌کارگیری تبدیلات معینی روی نمودار تابعی مفروض، می‌توانیم نمودار تابع‌های وابسته به آن را به‌دست آوریم و به این ترتیب، میزان کار در رسم نمودارها را کاهش دهیم. این تبدیلات عبارتند از انتقال‌های افقی و عمودی، انبساط و انقباض‌های عمودی، انبساط و انقباض‌های افقی و انعکاس‌ها (قرینه‌یابی). در این بخش انتقال‌های افقی و عمودی را بررسی می‌کنیم. قبل از بررسی، نمودار توابع مرجع رسم را یادآوری می‌کنیم.

$y=a^x \ , a>1$	$y=\log_a x \ , a>1$	$y=\frac{1}{x}$	$y=\sqrt{x}$	$y=\|x\|$	$y=x^2$
					
دامنه: R	دامنه: $(0,+\infty)$	دامنه: $R-\{0\}$	دامنه: $[0,+\infty)$	دامنه: R	دامنه: R
برد: $(0,+\infty)$	برد: R	برد: $R-\{0\}$	برد: $[0,+\infty)$	برد: $[0,+\infty)$	برد: $[0,+\infty)$

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ در اختیار باشد، با فرض $c>0$، جدول زیر انتقال‌های افقی و عمودی تابع f را نمایش می‌دهد.

ویژگی	نمودار	توضیح	تابع	نوع انتقال
① نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(x_0+c,y_0)$ روی تابع $y=f(x-c)$ تبدیل می‌شود. ② برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.		نمودار تابع f را c واحد به راست انتقال می‌دهیم.	$f(x-c)$	افقی
① نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(x_0-c,y_0)$ روی تابع $y=f(x+c)$ تبدیل می‌شود. ② برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.		نمودار تابع f را c واحد به چپ انتقال می‌دهیم.	$f(x+c)$	
① نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(x_0,y_0+c)$ روی تابع $y=f(x)+c$ تبدیل می‌شود. ② دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.		نمودار تابع f را c واحد به بالا انتقال می‌دهیم.	$f(x)+c$	عمودی
① نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(x_0,y_0-c)$ روی تابع $y=f(x)-c$ تبدیل می‌شود. ② دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.		نمودار تابع f را c واحد به پایین انتقال می‌دهیم.	$f(x)-c$	

● **مثال:** مختصات تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $A(3,1)$ روی تابع $y=f(x)$ را در توابع زیر بیابید.

(۱) $y=f(x)+2$ (۲) $y=f(x-2)$ (۳) $y=2+f(x+1)$

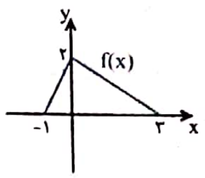
○ **حل:** (۱) به عرض هر نقطه ۲ واحد اضافه می‌شود، پس $A'(3,1+2)=(3,3)$.

(۲) به طول هر نقطه ۲ واحد اضافه می‌شود، پس $A'(3+2,1)=(5,1)$.

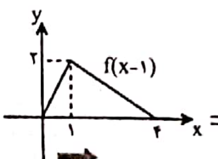
(۳) به طول هر نقطه ۱- واحد و به عرض آن ۲ واحد اضافه می‌شود، پس $A'(3-1,1+2)=(2,3)$.

● **مثال:** اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=f(x-1)-1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.

○ **حل:** برای رسم نمودار تابع g، کافی است نمودار تابع f را یک واحد به راست و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم. دامنه‌ی تابع g بازه‌ی $[0,4]$ و برد آن $[-1,1]$ است.

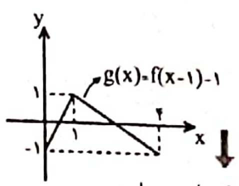


$\Rightarrow$



یک واحد به راست

$\Rightarrow$



یک واحد به پایین

تست اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی [۵ , ۲-] و برد آن بازه‌ی [۲ , ۳-] باشد، آنگاه دامنه و برد تابع $g(x)=2+f(x+2)$ چند عدد صحیح مشترک دارند؟

۱) ۶   ۲) ۳   ۳) ۵   ۴) ۴

پاسخ گزینه‌ی «۳» نمودار تابع g از انتقال نمودار تابع f به اندازه‌ی ۲ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا به دست می‌آید. در انتقال افقی دامنه و در انتقال عمودی برد تغییر می‌کند، لذا:

دامنه‌ی $f(x+2)$: $[-2-2\,,\,5-2]=[-4\,,\,3]$

برد $f(x+2)$: $[-3\,,\,2]$ بدون تغییر

$\Rightarrow$

دامنه‌ی $2+f(x+2)$: $[-4\,,\,3]$ بدون تغییر

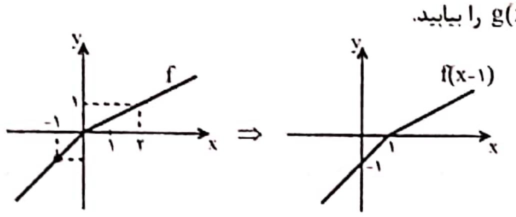
برد $2+f(x+2)$: $[-3+2\,,\,2+2]=[-1\,,\,4]$

بنابراین اشتراک دامنه و برد تابع g برابر است با:

$$D_g\cap R_g=[-4\,,\,3]\cap[-1\,,\,4]=[-1\,,\,3]$$

که اعداد صحیح در این فاصله عبارتند از ۱-، ۰، ۱، ۲ و ۳، پس پنج عدد صحیح مشترک در دامنه و برد تابع g وجود دارد.

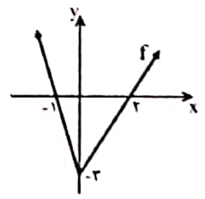
● **مثال:** اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{f(x-1)}$ را بیابید.



○ **حل:** برای تعیین دامنه‌ی تابع g، باید نامعادله‌ی $f(x-1)\ge 0$ را حل کنیم.

برای رسم نمودار تابع $f(x-1)$، کافی است نمودار تابع f را یک واحد به راست انتقال دهیم. با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع $f(x-1)$، به ازای $x\ge 1$ نامنفی است، پس $D_g=[1\,,\,+\infty)$.

تست اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، معادله‌ی $f(f(x+1))=-3$ چند ریشه دارد؟



۱) یک ریشه

۲) دو ریشه

۳) سه ریشه

۴) ریشه ندارد

پاسخ گزینه‌ی «۲» فرض می‌کنیم $a=f(x+1)$، بنابراین $f(a)=-3$، با توجه به نمودار باید $a=0$ باشد، در نتیجه $f(x+1)=0$. برای یافتن ریشه‌های این معادله کافی است نمودار تابع f را یک واحد به چپ انتقال دهیم. بنابراین صفرهای تابع $y=f(x+1)$، ۱ و ۲- هستند، پس ریشه‌های معادله‌ی $f(f(x+1))=-3$، برابر ۱ و ۲- هستند.

گاهی لازم است با استفاده از عملیات جبری (مربع کامل کردن، تفکیک کسر و ....) ابتدا تابع را با یکی از توابع مرجع هم‌خانواده کرد و سپس با انتقال‌های افقی و عمودی آن تابع مرجع، نمودار تابع خواسته شده را رسم نمود. به شکل‌های استاندارد زیر توجه کنید:

تابع درجه‌ی دوم : $y=x^2+bx+c\xrightarrow{\text{مربع کامل کردن}}y=(x-h)^2+k$

تابع گویا : $y=\dfrac{x+a}{x+b}\xrightarrow{\text{تفکیک کسر}}y=\dfrac{1}{x-h}+k$

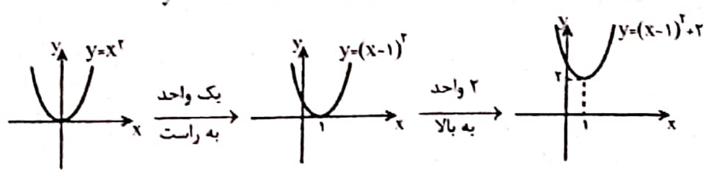
تابع قدرمطلق : $y=\sqrt{x^2+bx+c}\xrightarrow{\sqrt{a^2}=|a|}y=|x-k|$ **(زیر رادیکال مربع کامل باشد.)**

● **مثال:** تابع $y=x^2-2x+3$ را رسم کرده و برد آن را بیابید.

○ **حل:** ابتدا تابع $y=x^2-2x+3$ را به‌شکل استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$y=x^2-2x+3=(x^2-2x+1)+2=(x-1)^2+2$$

کافی است نمودار تابع $y=x^2$ را یک واحد به راست و سپس ۲ واحد به بالا انتقال دهیم. با توجه به نمودار، برد تابع $R_y=[2\,,\,+\infty)$ است.



تست برای رسم نمودار تابع $g(x)=\frac{x}{x-۱}$ به کمک $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$ کافی است تابع f را .... انتقال دهیم.

۱) یک واحد به راست و سپس یک واحد به بالا
۲) یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا
۳) یک واحد به راست و سپس یک واحد به پایین
۴) یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین

پاسخ گزینه‌ی «۲» تابع g را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم. برای این کار در صورت، مخرج را تولید می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{(x-۱)+۱}{x-۱}=۱+\frac{۱}{x-۱}$$

با توجه به تابع g، کافی است نمودار تابع f را یک واحد به چپ انتقال دهیم تا تابع $y_۱=\frac{۱}{x-۱}$ به دست آید و سپس $y_۱$ را یک واحد به بالا انتقال دهیم تا نمودار تابع g به دست آید.

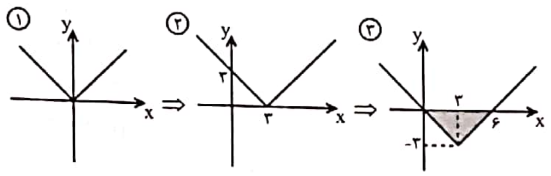
تست مساحت بین نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۹}-۳$ با محور طول‌ها کدام است؟

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۱۰

پاسخ گزینه‌ی «۳» ابتدا تابع g را به‌شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{x^۲-۶x+۹}-۳=\sqrt{(x-۳)^۲}-۳=|x-۳|-۳$$

برای رسم آن کافیست نمودار تابع $y=|x|$ را ۳ واحد به راست و سپس ۳ واحد به پایین انتقال دهیم. مساحت مطلوب برابر است با:



$$S=\frac{۱}{۲}\times۳\times۶=۹$$

نکته **با استفاده از نامساوی‌ها می‌توان برد بعضی از توابع را بیابیم. توجه کنید که عبارت‌های $|ax+b|$ و $(ax+b)^۲$ و $\sqrt{ax+b}$، همواره نامنفی‌اند، یعنی بزرگتر یا مساوی صفرند.**

● **مثال:** برد توابع زیر را بیابید.

$(۳)\ y=x^۲-۶x+۲$

○ **حل:**

$y=(x^۲-۶x+۹)-۷=(x-۳)^۲-۷$

$(x-۳)^۲\geq۰\Rightarrow(x-۳)^۲-۷\geq-۷$

$\Rightarrow y\geq-۷$

در نتیجه برد تابع، بازه‌ی $[-۷\,,+\infty)$ است.

$(۲)\ y=\sqrt{x-۴}+۵$

○ **حل:** $\sqrt{x-۴}\geq۰$، پس:

$\sqrt{x-۴}+۵\geq۵\Rightarrow y\geq۵$

در نتیجه برد تابع، بازه‌ی $[۵\,,+\infty)$ است.

$(۱)\ y=|x-۳|-۲$

○ **حل:** $|x-۳|\geq۰$، پس:

$|x-۳|-۲\geq-۲\Rightarrow y\geq-۲$

در نتیجه برد تابع، بازه‌ی $[-۲\,,+\infty)$ است.

پیمانه‌های ۷۰ و ۷۱

۱۰ تست ۲۰ تست

انتقال‌های افقی و عمودی تیپ ۳۵ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۱۶ ریاضی ۱، تمرین‌های صفحه‌ی ۵۳ حسابان ۱ و صفحه‌های ۲ تا ۵ حسابان ۲

۱۱۸۱. اگر نقطه‌ی $A(x_۰\,,y_۰)$ روی تابع $y=f(x)$ باشد، نقطه‌ی A' متناظر آن روی تابع $g(x)=f(x+۱)-۳$ کدام است؟ (حسابان ۲- صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال) ①

۱) $(x_۰+۱\,,y_۰+۳)$
۲) $(x_۰-۱\,,y_۰-۳)$
۳) $(x_۰+۱\,,y_۰-۳)$
۴) $(x_۰-۱\,,y_۰+۳)$

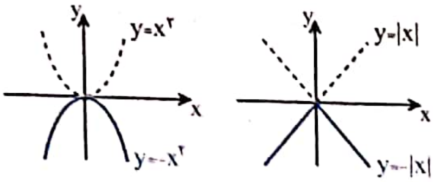
۱۱۸۲. نقطه‌ی $A(۱\,,-۸)$ روی تابع $y=f(x+۱)-۲$ است، تبدیل یافته‌ی این نقطه در تابع $y=f(x-۱)+۲$ در کدام فاصله از مبدأ مختصات است؟ (حسابان ۲- صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال) ②

۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) ۵
۴) $۴\sqrt{۵}$

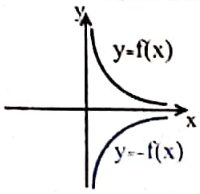
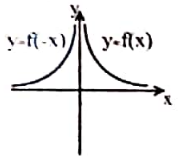
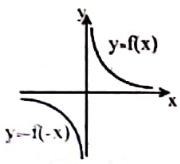
۱۱۸۳. اگر دامنه و برد تابع $k(x)=f(x-۱)+۱$ به ترتیب $D_k=[-۱\,,۱]$ و $R_k=[۰\,,۴]$ باشند، آنگاه در تابع $g(x)=f(x+۱)-۱$، مجموعه‌ی $D_g\cap R_g$ شامل چند عدد صحیح است؟ (حسابان ۲- صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال) ③

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

در ریاضی ۱ دیدیم که نمودار تابع $y=-x^2$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=x^2$ نسبت به محور x هاست، هم‌چنین نمودار تابع $y=-|x|$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=|x|$ نسبت به محور x هاست.



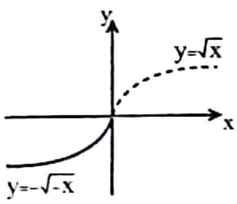
در حالت کلی با در اختیار داشتن نمودار تابع $y=f(x)$ می‌توانیم نمودار تابع‌های $y=-f(x)$، $y=f(-x)$ و $y=-f(-x)$ را به روش قرینه‌یابی رسم کنیم. به جدول زیر توجه کنید.

ویژگی‌ها	روش ترسیم	نمودار	تابع خواسته شده
① نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(x_0,-y_0)$ روی تابع $y=-f(x)$ تبدیل می‌شود. ② دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.	کافی است قرینه‌ی تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.		$y=-f(x)$
① نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(-x_0,y_0)$ روی تابع $y=f(-x)$ تبدیل می‌شود. ② برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.	کافی است قرینه‌ی تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم.		$y=f(-x)$
① نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(-x_0,-y_0)$ روی تابع $y=-f(-x)$ تبدیل می‌شود. ② دامنه و برد هر دو تغییر می‌کنند.	کافی است قرینه‌ی تابع $y=f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.		$y=-f(-x)$

● **مثال:** نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

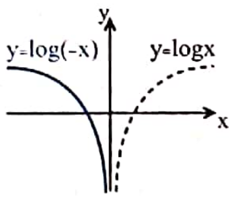
۱) $y=-\sqrt{-x}$

○ **حل:** کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.



۲) $y=\log(-x)$

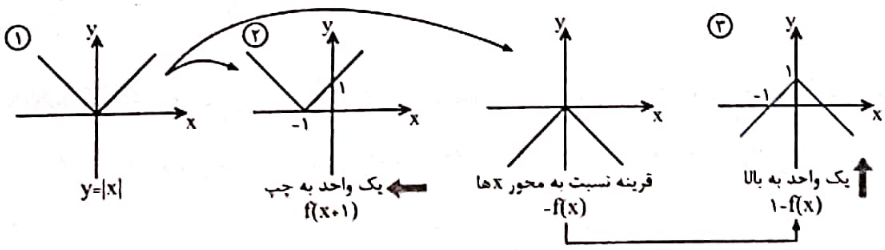
○ **حل:** کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y=\log x$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم.



تست اگر $f(x)=|x|$ باشد، آنگاه نمودار دو تابع $f(x+1)$ و $1-f(x)$ در کدام بازه‌ی زیر بر هم منطبق‌اند؟

۱) $(-\infty,-1]$ ۲) $[0,1]$ ۳) $[-1,0]$ ۴) $[1,+\infty)$

پاسخ گزینه‌ی «۳» برای رسم $f(x+1)$، نمودار تابع f را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم (شکل ②). برای رسم نمودار $1-f(x)$، کافی است ابتدا نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه کرده و سپس نمودار حاصل را یک واحد به بالا انتقال دهیم (شکل ③).

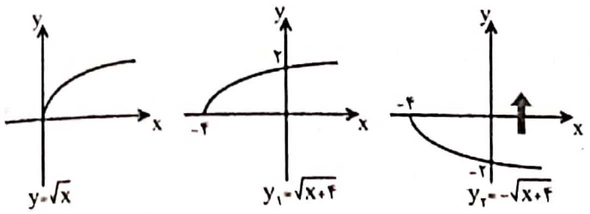


بنابراین نمودار شکل‌های ② و ③ در بازه‌ی $[-1,0]$ بر هم منطبق‌اند.

تست نمودار تابع $f(x)=a-\sqrt{x+4}$ از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند، حدود a کدام است؟

۱) $a\geq 2$ ۲) $a\leq 2$ ۳) $a\geq 0$ ۴) $a\leq 0$

پاسخ گزینه‌ی «۱» برای رسم نمودار تابع $y=-\sqrt{x+4}$، نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ۴ واحد به چپ انتقال داده و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. برای آنکه نمودار تابع f از ناحیه‌ی سوم عبور نکند باید عرض از مبدأ آن نامنفی باشد، پس باید نمودار y_2 را حداقل ۲ واحد به بالا انتقال دهیم، بنابراین $a\geq 2$.

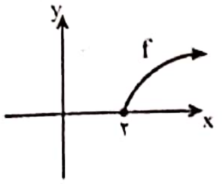


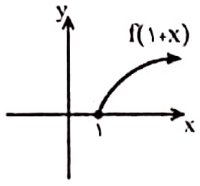
● **مثال:** اگر نمودار تابع $y=f(x)$ شکل زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=f(1-x)$ را رسم کنید.

○ **حل:** با تبدیل x به $-x$ خواهیم داشت:

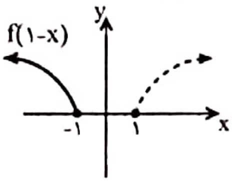
$$g(-x)=f(1+x)$$

برای رسم $y=f(1+x)$ کافی است نمودار تابع f را یک واحد به چپ انتقال دهیم (شکل ۱).





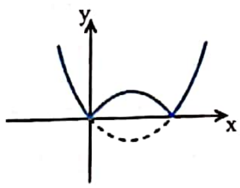
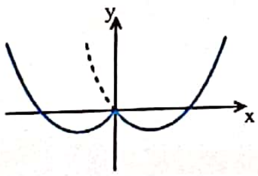
(شکل ۱)



(شکل ۲)

برای رسم $g(x)$ کافی است قرینه‌ی نمودار حاصل را نسبت به محور yها رسم کنیم. دقت کنید برای رسم نمودار تابع g نیز می‌توان ابتدا نمودار تابع f را نسبت به محور yها قرینه کرد تا نمودار تابع $f(-x)$ حاصل شود؛ سپس آن را یک واحد به راست انتقال داد تا نمودار $f(-x+1)$ به‌دست آید.

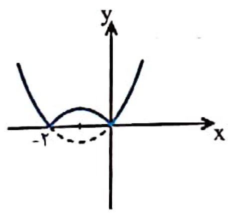
رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$: در فصل سوم با رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ آشنا شدید.با استفاده از تعریف قدرمطلق می‌توانیم نمودار تابع $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$ را با در اختیار داشتن نمودار تابع $y=f(x)$ رسم کنیم. به جدول زیر توجه کنید.

روش رسم بدون ضابطه‌بندی	نمودار	تعریف ضابطه‌ی قدرمطلقی	تابع خواسته شده
کافی است قسمت‌هایی از نمودار را که پایین محور x هاست نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس قسمت پایین محور xها را حذف کنیم.		$y=\begin{cases}f(x) & , \ f(x)\geq 0\\ -f(x) & , \ f(x)<0\end{cases}$	$y=\lvert f(x)\rvert$
کافی است قسمت سمت چپ محور yها را حذف کرده (در صورت وجود) و سپس قرینه‌ی قسمت سمت راست محور yها را نسبت به محور yها رسم کنیم.		$y=\begin{cases}f(x) & , \ x\geq 0\\ f(-x) & , \ x<0\end{cases}$	$y=f(\lvert x\rvert)$

● **مثال:** به رسم نمودار توابع زیر توجه کنید.

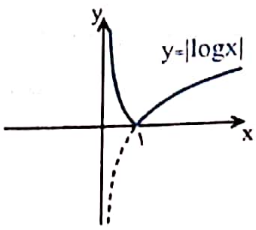
(۲) $y=|x^2+2x|$

○ **حل:** با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^2+2x$ و ویژگی رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ شکل روبه‌رو را داریم.



(۱) $y=|\log x|$

○ **حل:** با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\log x$ و ویژگی رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ شکل روبه‌رو را داریم.



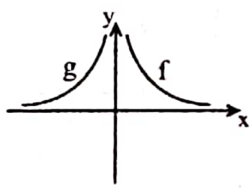
پیمانه‌های ۷۲ و ۷۳

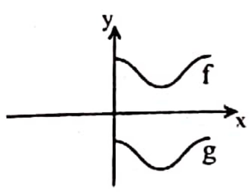
۱۰ تست ۲۰ تست

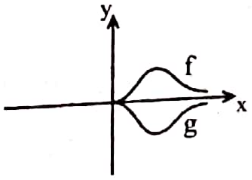
انعکاس نمودارها (قرینه‌یابی) **تیپ ۳۶** صفحه‌های ۱۱۴ تا ۱۱۶ ریاضی ۱، صفحه‌ی ۲۷ حسابان ۱ و صفحه‌های ۷ تا ۱۲ حسابان ۲

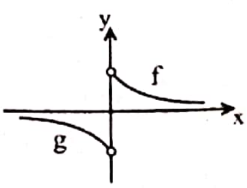
۱۲۱۱. اگر f و g دو تابع باشند، به‌طوری که $(f+g)(x)=0$، آنگاه کدام گزینه می‌تواند نمودارهای آنها را در یک دستگاه مختصات نشان دهد؟

(حسابان ۱ - صفحه‌ی ۲۷- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون- ۸۸)

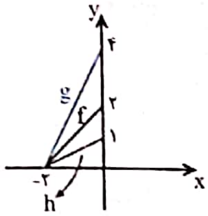
۱) 

۲) 

۳) 

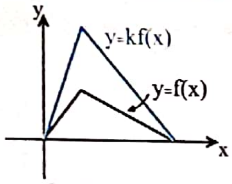
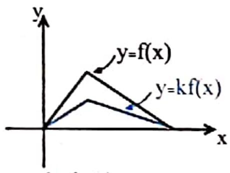
۴) 

درس‌نامه — انبساط و انقباض عمودی



نمودار تابع خطی $f(x)=x+2$ در بازه‌ی $[-2,0]$ در شکل زیر رسم شده است. برای رسم نمودار $g(x)=2f(x)$ کافی است عرض هر نقطه‌ی تابع f را در ۲ ضرب کنیم و برای رسم نمودار تابع $h(x)=\frac{1}{2}f(x)$ کافی است عرض هر نقطه‌ی تابع f را $\frac{1}{2}$ برابر نماییم. این موضوع را می‌توانیم تعمیم دهیم.

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ در اختیار باشد، نمودار تابع $y=kf(x)$ را می‌توانیم با ضرب کردن عرض هر نقطه‌ی تابع f در عدد k رسم کنیم. به عبارت دیگر، اگر نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ روی تابع f باشد، آنگاه این نقطه در تابع $kf(x)$ به نقطه‌ی $A'(x_0, ky_0)$ تبدیل می‌شود. به جدول زیر توجه کنید.

ویژگی‌ها	روش ترسیم	نمودار	تابع خواسته شده	
① نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(x_0, ky_0)$ روی تابع kf تبدیل می‌شود. ② در انبساط و انقباض عمودی، دامنه‌ی تابع ثابت است ولی برد تابع تغییر می‌کند.	اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از انبساط عمودی تابع f حاصل می‌شود.	(k>۱)	$y=kf(x)\ ,\ k>1$	انبساط و انقباض عمودی
③ اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، آنگاه: $D_{kf}=D_f=[a,b]$ $R_{kf}=[kc,kd]$	اگر $0<k<1$ باشد، نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی تابع f حاصل می‌شود.	(۰<k<۱)	$y=kf(x)\ ,\ 0<k<1$	

● **مثال:** مختصات تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $A(-2, 2)$ روی تابع $y=f(x)$ را در توابع زیر بیابید.

(۱) $y=3f(x)+2$ (۲) $y=\frac{1}{2}f(x-1)-1$

○ **حل:** (۱) عرض هر نقطه سه برابر شده و سپس دو واحد به آن اضافه می‌شود، پس $A'(2, 3(-2)+2)=(-4, 2)$.

(۲) به طول هر نقطه یک واحد اضافه می‌شود و عرض هر نقطه $\frac{1}{2}$ برابر شده و سپس (-1) واحد به آن اضافه می‌شود.

$$A'(2+1, \frac{1}{2}(-2)-1) \Rightarrow A'(3, -2)$$

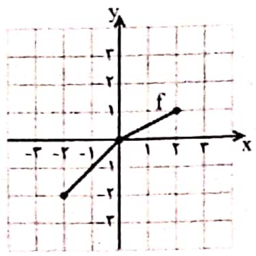
● **مثال:** اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب $D_f=[-1, 4]$ و $R_f=[-1, 3]$ باشند، دامنه و برد تابع $g(x)=2f(x-2)$ را بیابید.

○ **حل:** اگر نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ روی تابع f باشد، آنگاه نقطه‌ی $A'(x_0+2, 2y_0)$ روی تابع g است، پس:

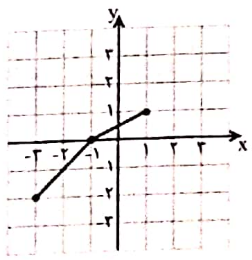
$$D_g=[-1+2, 4+2]=[1, 6] \quad \text{و} \quad R_g=[2(-1), 2(3)]=[-2, 6]$$

● **مثال:** اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=2f(x+1)+1$ را رسم کنید.

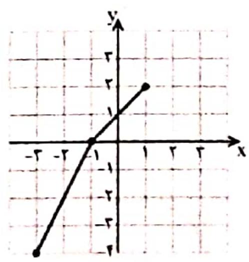
○ **حل:** برای رسم نمودار تابع g کافی است نمودار تابع f را ابتدا یک واحد به چپ انتقال داده (شکل ۱)، سپس عرض هر نقطه را ۲ برابر کرده (شکل ۲) و در انتها نمودار حاصل را یک واحد به بالا انتقال دهیم (شکل ۳). اگر نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ روی تابع f باشد، آنگاه نقطه‌ی $A'(x_0-1, 2y_0+1)$ روی تابع g است.



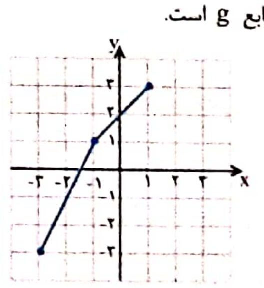
⇒



f(x+۱)
(شکل ۱)



۲f(x+۱)
(شکل ۲)



۲f(x+۱)+۱
(شکل ۳)

● **مثال:** توضیح دهید چگونه می‌توان با استفاده از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲$، نمودار تابع با ضابطه‌ی $g(x)=۲x^۲+۸x+۵$ را رسم نمود.

○ **حل:** ابتدا تابع g را به شکل استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$g(x)=۲(x^۲+۴x)+۵=۲((x+۲)^۲-۴)+۵=۲(x+۲)^۲-۳$$

برای رسم نمودار تابع g، ابتدا نمودار تابع f را ۲ واحد به چپ انتقال داده تا $y_۱=(x+۲)^۲$ به دست آید، سپس عرض هر نقطه‌ی تابع $y_۱$ را ۲ برابر کرده تا تابع $y_۲=۲(x+۲)^۲$ حاصل شود و در انتها نمودار $y_۲$ را ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا تابع g به دست آید.

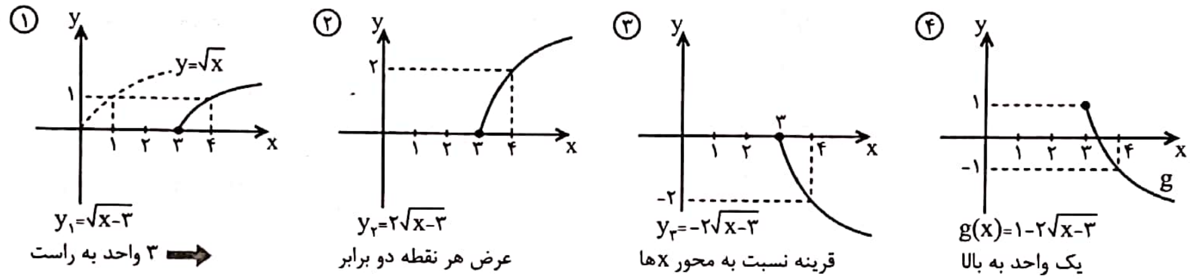
تست نمودار تابع با ضابطه‌ی $g(x)=۱-\sqrt{۴x-۱۲}$ کدام خط زیر را قطع می‌کند؟

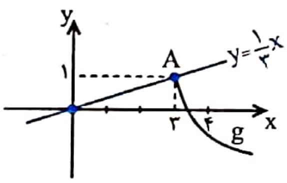
۱) $y=x$ ۲) $y=۴x$ ۳) $۲y-x=۰$ ۴) $۴y-x=۰$

پاسخ گزینه‌ی «۴» ضابطه‌ی تابع را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x)=۱-\sqrt{۴(x-۳)}=۱-۲\sqrt{x-۳}$$

حال نمودار تابع g را با انتقال تابع $y=\sqrt{x}$ رسم می‌کنیم:

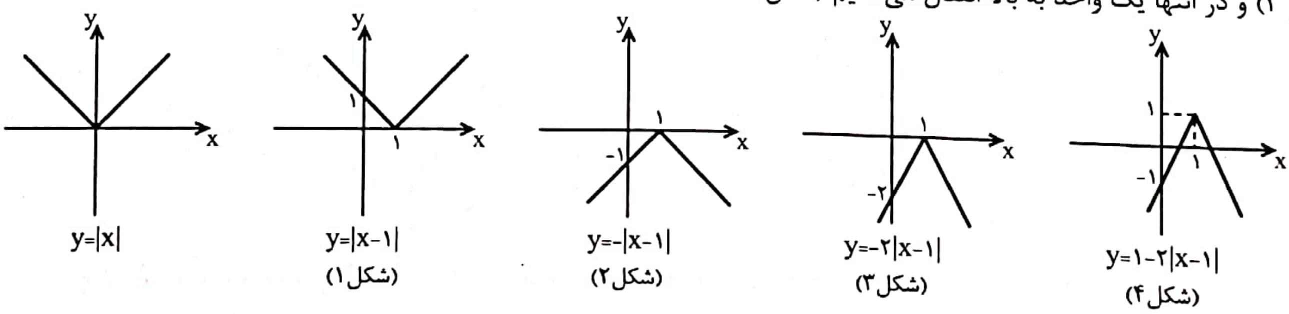




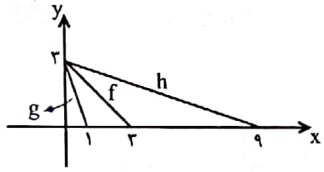
خطوط داده شده، گذرنده از مبدأ و به‌ترتیب با شیب‌های ۱، ۴، $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۴}$ هستند. مطابق شکل شیب خط گذرنده از مبدأ و نقطه‌ی A برابر $\frac{۱}{۳}$ است. از میان خطوط داده شده خطی با شیب نامنفی نمودار را قطع می‌کند که شیب آن کوچکتر یا مساوی $\frac{۱}{۳}$ باشد. در نتیجه گزینه‌ی ۴ درست است.

● **مثال:** نمودار تابع با ضابطه‌ی $g(x)=۱-۲|x-۱|$ را به کمک نمودار تابع $f(x)=|x|$ رسم کنید.

○ **حل:** ابتدا تابع f را یک واحد به راست انتقال داده (شکل ۱)، سپس نسبت به محور xها قرینه کرده (شکل ۲)، پس از آن عرض هر نقطه را ۲ برابر کرده (شکل ۳) و در انتها یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم (شکل ۴).



تابع $f(x)=3-x$ را با دامنه‌ی $0\le x\le 3$ در نظر بگیرید. برای رسم نمودار تابع $g(x)=f(3x)$، در تابع f در همه جا به جای x، قرار می‌دهیم $3x$ و داریم:



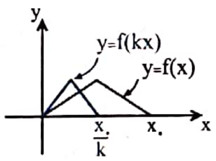
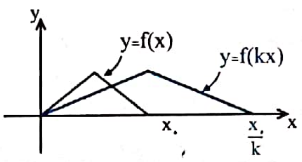
$$g(x)=f(3x)=3-3x \quad \text{و} \quad 0\le 3x\le 3\Rightarrow 0\le x\le 1\Rightarrow D_g=[0\,,1]$$

همچنین برای رسم تابع $h(x)=f(\frac{x}{3})$ خواهیم داشت:

$$h(x)=f(\frac{x}{3})=3-\frac{x}{3} \quad \text{و} \quad 0\le \frac{x}{3}\le 3\Rightarrow 0\le x\le 9\Rightarrow D_h=[0\,,9]$$

از رسم نمودار دو تابع g و h برحسب f دیده می‌شود که برد توابع g و h با f یکسان است ولی طول هر نقطه بر ضریب x تقسیم می‌شود، یعنی اگر نقطه‌ی $A(x_0\,,y_0)$ بر روی تابع f باشد، آنگاه نقطه‌ی $A'(\frac{x_0}{3}\,,y_0)$ روی تابع g و نقطه‌ی $A''(3x_0\,,y_0)$ روی تابع h است. این موضوع را می‌توانیم تعمیم دهیم. فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ در اختیار باشد، برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول هر نقطه‌ی تابع f را بر k تقسیم کنیم. به عبارت دیگر اگر نقطه‌ی $A(x_0\,,y_0)$ روی تابع f باشد، آنگاه تبدیل یافته‌ی این نقطه روی تابع $y=f(kx)$ نقطه‌ی $A'(\frac{x_0}{k}\,,y_0)$ است. در این حالت، دیده می‌شود که عرض هر نقطه ثابت می‌ماند. به جدول زیر توجه کنید.

انبساط و انقباض افقی

ویژگی‌ها	روش ترسیم	نمودار	تابع خواسته شده
① نقطه‌ی $A(x_0\,,y_0)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(\frac{x_0}{k}\,,y_0)$ روی $f(kx)$ تبدیل می‌شود. ② در انبساط و انقباض افقی، برد ثابت است ولی دامنه‌ی تابع تغییر می‌کند. ③ برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار f را بر k تقسیم کنیم و به طریق مشابه در تلاقی با محور xها نیز طول هر نقطه بر k تقسیم می‌شود.	اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انقباض افقی نمودار تابع $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید.		$y=f(kx)\ ,\ k>1$
	اگر $0<k<1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار تابع $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید.		$y=f(kx)\ ,\ 0<k<1$

● **مثال:** مختصات تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $A(4\,,-2)$ روی تابع $y=f(x)$ را در توابع زیر بیابید.

(۱) $y=f(2x)$ (۲) $y=f(-2x)$ (۳) $y=f(-2x+1)$

○ **حل:** (۱) طول نقطه را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و عرض ثابت است، پس $A'(\frac{4}{2}\,,-2)=(2\,,-2)$.

(۲) طول نقطه را بر ۲- تقسیم می‌کنیم و عرض ثابت است، پس $A'(\frac{4}{-2}\,,-2)=(-2\,,-2)$.

(۳) خواهیم داشت $-2x+1=4$، پس $x=\frac{-3}{2}$، بنابراین $A'(\frac{-3}{2}\,,-2)$.

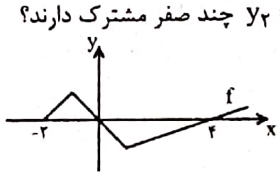
● **مثال:** اگر دامنه و برد تابع f به‌ترتیب $D_f=[-2,1]$ و $R_f=[0\,,4]$ باشد، دامنه و برد تابع $g(x)=-2f(3x-1)$ را بیابید.

○ **حل:** برای تعیین دامنه داریم:

$$-2\le 3x-1\le 1\Rightarrow -1\le 3x\le 2\Rightarrow \frac{-1}{3}\le x\le\frac{2}{3}\Rightarrow D_g=[\frac{-1}{3}\,,\frac{2}{3}]$$

برای تعیین برد، عرض هر نقطه را (-2) برابر می‌کنیم، پس $R_g=[-8\,,0]$.

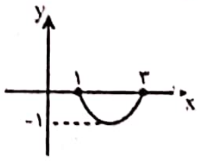
(**تست**) اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، آنگاه دو تابع $y_1=f(x-1)$ و $y_2=f(2x)$ چند صفر مشترک دارند؟



۱) یک ۲) دو
۳) سه ۴) هیچ

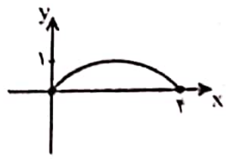
پاسخ گزینه‌ی «۱» صفرهای تابع f برابر ۲-، ۰ و ۴ هستند. برای رسم تابع $y_۱ = f(x-۱)$ باید f را یک واحد به راست انتقال دهیم، پس صفرهای آن برابر ۱-، ۱ و ۵ هستند. از طرفی برای رسم $y_۲ = f(۲x)$ باید طول هر نقطه را بر ۲ تقسیم کنیم، پس صفرهای تابع $y_۲ = f(۲x)$ برابر ۱-، ۰ و ۲ هستند؛ در نتیجه صفر مشترک دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ برابر ۱- است.

(تست) اگر نمودار تابع $y = -f(x-۱)$ به شکل

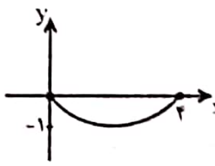


باشد، نمودار تابع $y = f(\frac{x}{۲})$ به کدام شکل زیر است؟

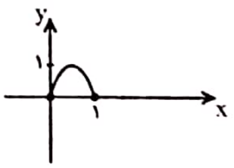
۱)



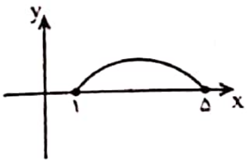
۲)



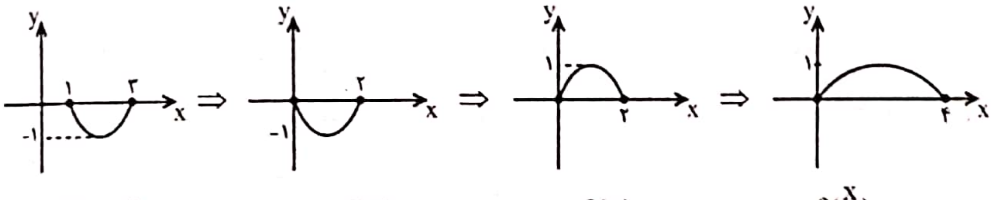
۳)



۴)



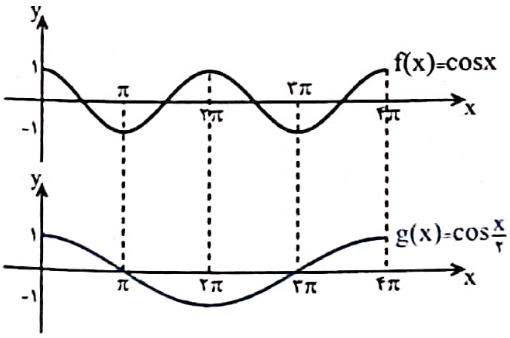
پاسخ گزینه‌ی «۱» ابتدا نمودار تابع f را می‌یابیم. برای این منظور، نمودار داده شده را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y_۱ = -f(x)$ به دست آید و سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y_۲ = f(x)$ به دست آید.



$y = -f(x-۱)$ ⇒ $y_۱ = -f(x)$ ⇒ $y_۲ = f(x)$ ⇒ $y = f(\frac{x}{۲})$

حال در این تابع، طول هر نقطه را بر $\frac{۱}{۲}$ تقسیم می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(\frac{x}{۲})$ به‌دست آید.

● **مثال:** نمودار تابع $g(x) = \cos\frac{x}{۲}$ را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه‌ی $[۰ , ۴\pi]$ رسم کنید.



○ **حل:** نمودار تابع f در بازه‌ی $[۰ , ۴\pi]$، شکل روبه‌رو است. برای رسم $g(x) = \cos\frac{x}{۲}$ کافی است طول هر نقطه‌ی تابع $y = \cos x$ را بر $\frac{۱}{۲}$ تقسیم کنیم. محل‌های تلاقی نمودار تابع g با محور x ها، از تقسیم محل‌های تلاقی نمودار تابع f بر $\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید. بنابراین محل‌های تلاقی با محور x ها در این بازه عبارتند از:

$$\frac{\frac{\pi}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = \pi \quad و \quad \frac{\frac{۳\pi}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = ۳\pi$$