پاسخنامه تشریحی

۱ — ۴ ۳ ۲ **۱**

$$f(x+1)=x^2+4x \Rightarrow f(x+1)=x(x+4)$$

$$x+1=t \Rightarrow \begin{cases} x=t-1 \\ 4+x=t+3 \end{cases} \Rightarrow f(t)=(t-1)(t+3)$$

$$x-1=t \Rightarrow \begin{cases} t-1=x-2 \\ t+3=x+2 \end{cases} \Rightarrow f(x-1)=(x-2)(x+2)=x^2-4$$

۲ — ۴ ۳ ۲ **۱**

$$f(1)=f(0)-2f(-1)=1-2(-1)=1+2=3$$

$$f(2)=f(1)-2f(0)=3-2(1)=3-2=1$$

$$f(3)=f(2)-2f(1)=1-2(3)=1-6=-5$$

۳ — **۴** ۳ ۲ ۱ توان‌های x همگی زوج‌اند پس حاصل $3x^{10}+2x^4+3x^2$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.
پس حاصل $3x^{10}+2x^4+3x^2+2$ به ازای تمام مقادیر x همواره بزرگتر یا مساوی ۲ است.
بنابراین به ازای هیچ مقداری از x معادلهٔ $3x^{10}+2x^4+3x^2+2=0$ برقرار نیست.

۴ — ۴ **۳** ۲ ۱ باید $f(x)+1>0$ باشد، یعنی $f(x)>-1$ که همواره چنین است به جز در نقطهٔ -1 که مقدار $f(x)$ در آنجا -1 است. پس دامنه برابر است با $\mathbb{R}-\{-1\}$ در بین گزینه‌ها، گزینهٔ «۳» نیز دامنه $\mathbb{R}-\{-1\}$ است.

۵ — ۴ ۳ **۲** ۱

$$\frac{1}{x^2+x-4}+\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2+x+4}=0 \xrightarrow[x^2+x+1=t]{\text{با فرض}} \frac{1}{t-5}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t+3}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t-5}+\frac{1}{t+3}=\frac{-1}{t} \Rightarrow \frac{t+3+t-5}{t^2-2t-15}=\frac{-1}{t}$$

$$\frac{2t-2}{t^2-2t-15}=\frac{-1}{t} \Rightarrow 2t^2-2t=-t^2+2t+15 \Rightarrow 3t^2-4t-15=0$$

$$t=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-(4\times3\times(-15))}}{2\times3}=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{196}}{6} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{4+14}{6}=\frac{18}{6}=3 \\ t=\frac{4-14}{6}=\frac{-5}{3} \end{cases}$$

$$x^2+x+1=t \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t=3} x^2+x+1=3 \Rightarrow x^2+x-2=0 \rightarrow (x-1)(x+2)=0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases} \\ \xrightarrow{t=\frac{-5}{3}} x^2+x+1=\frac{-5}{3} \Rightarrow x^2+x+\frac{8}{3}=0 \\ \Rightarrow \Delta=1^2-4\times1\times\frac{8}{3}=\frac{-29}{3}<0 \ \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

۶ — ۴ ۳ ۲ **۱** تعیین علامت $\frac{x+2}{x-1}$ یا $\frac{x-1}{x+2}$ فرقی ندارد.

x	$-\infty$		-2		$+1$		$+\infty$
f(x)		+	∞	−	∞	+	

$$\frac{x+2}{x-1}\geq 0\ ,\ x+2\neq 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1}>0 \Rightarrow x<-2 \ \text{یا}\ x>+1$$

۷ — ۴ ۳ ۲ **۱**

دو معادله را با هم مساوی قرار می‌دهیم و
چون تلاقی ندارند ⇐ ریشه ندارد ⇐ $\Delta<0$

$$(2x+1)(x+8)=mx \Rightarrow 2x^2+16x+x+8=mx$$

$$\Rightarrow 2x^2+17x-mx+8=0 \Rightarrow 2x^2+(17-m)x+8=0$$

$$\xrightarrow{\Delta<۰} (۱۷-m)^۲-۴(۲)(۸)<۰ \Rightarrow (۱۷-m)^۲-۶۴<۰ \Rightarrow (۱۷-m)^۲<۶۴$$

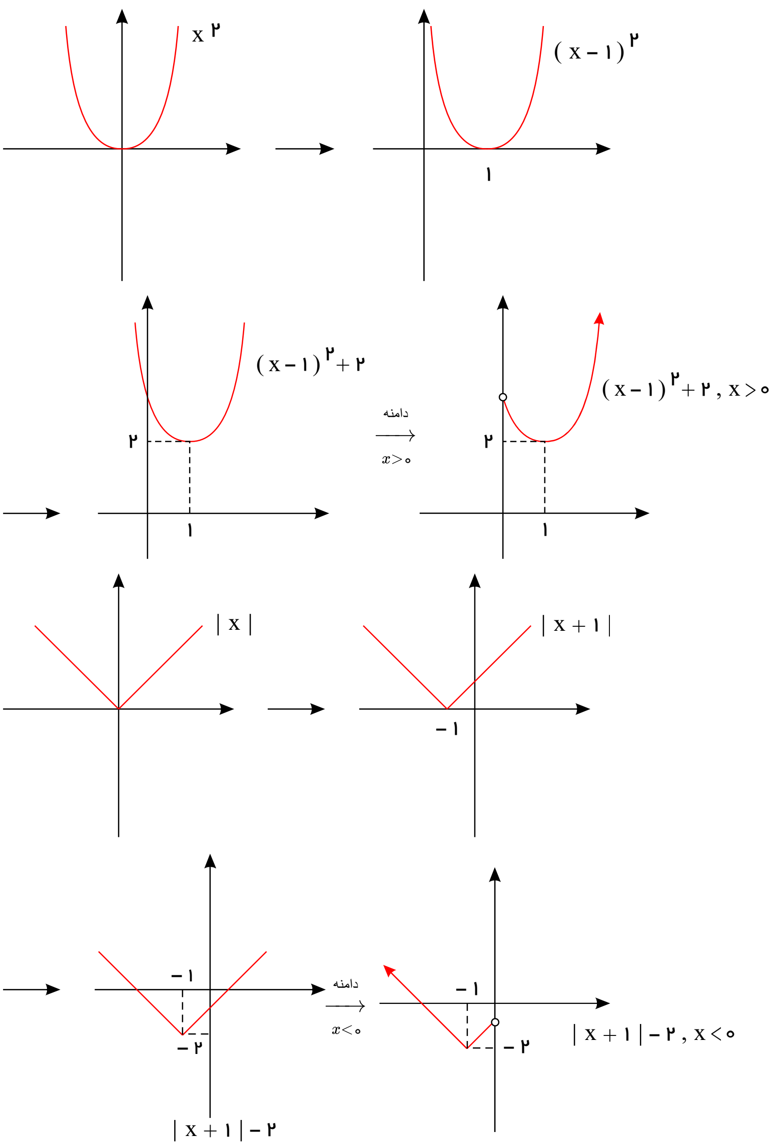
$$\Rightarrow -۸<۱۷-m<۸ \Rightarrow -۲۵<-m<-۹ \Rightarrow \boxed{۹<m<۲۵}$$

۸ ۱ ۲ ۳ ۴ جدول تعیین علامت y این‌گونه است:

x		−۲		−۱		۱		۲	
y	−	o	+	o	−	o	+	o	−

بنابراین تنها گزینهٔ مورد قبول گزینهٔ ۱ است.

۹ ۱ ۲ ۳ ۴ تابع را به روش انتقال رسم می‌کنیم:



دقت کنید $x=۰$ در دامنه‌ی هیچ یک از ضابطه‌ها نیست.

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

$$f(x)<۰ \Rightarrow x^۳-۴x^۲-x+۴<۰ \Rightarrow x^۳-۴x^۲-(x-۴)<۰$$

$$\Rightarrow x^۲(x-۴)-(x-۴)<۰ \Rightarrow (x^۲-۱)(x-۴)<۰$$

x		−۱		۱		۴	
$x^۲-۱$			−	o	+		+
x − ۴			−		−	o	+
f (x)			+	o	−	o	+

$$\Rightarrow x \in (۱,۴) \rightarrow ۴-۱=۳$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ برای داشتن ریشه‌ی مضاعف باید $\Delta=۰$ باشد، بنابراین:

$$\Delta = ۰ \to b^{۲} - ۴ac = ۰ \to (-۶m)^{۲} - (۴ \times m^{۲} \times (۲m+n)) = ۰ \Rightarrow ۳۶m^{۲} - (۴m^{۲}(۲m+n)) = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور } ۴m^{۲}} ۴m^{۲}(۹-(۲m+n)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۴m^{۲} = ۰ \Rightarrow m = ۰ \quad \text{قابل قبول نیست چون معادله درجه دو تشکیل نمی‌شود} \\ ۹ - ۲m - n = ۰ \Rightarrow ۲m+n = ۹ \end{cases}$$

با قرار دادن $۲m + n = ۹$ معادله بصورت زیر در می‌آید:

$$m^{۲}x^{۲} - ۶mx + ۹ = ۰$$

ریشه‌ی هر معادله در آن صدق می‌کند، بنابراین:

$$m^{۲}\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲} - ۶m \times \frac{۳}{۴} + ۹ = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۱۶}m^{۲} - \frac{۹}{۲}m + ۹ = ۰ \xrightarrow{\div ۹} \frac{۱}{۱۶}m^{۲} - \frac{۱}{۲}m + ۱ = ۰ \xrightarrow{\times ۱۶} m^{۲} - ۸m + ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (m-۴)^{۲} = ۰ \Rightarrow m - ۴ = ۰ \Rightarrow m = ۴ \xrightarrow{۲m+n=۹} ۲ \times (۴) + n = ۹ \Rightarrow n = ۱$$

۱۲ ۴ **۳** ۲ ۱ **چشم‌انداز: چون دامنهٔ تابع فقط یک عضو دارد یعنی عبارت زیر رادیکال در یک نقطه صفر و در بقیهٔ نقاط منفی است. پس به شکل $-(x-x_{۰})^{۲}$ خواهد بود.**

پلهٔ یکم:

$$-x^{۲} + ۴x - a = -(x^{۲} - ۴x + a) = -(x - x_{۰})^{۲} \Rightarrow x_{۰} = ۲, a = ۴$$

پلهٔ دوم:

$$g(x) = \frac{۵x - ۱}{۲x + ۴} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{x | ۲x + ۴ = ۰\} = \mathbb{R} - \{-۲\}$$

۱۳ **۴** ۳ ۲ ۱

$$R = \{\underline{(۰, a^{۲} - b^{۲})}, \underbrace{(-۲, ۴)}, (a - b - ۳, a + b), \underbrace{(-۲, a + b)}, \underline{(۰, -۲۰)}, (d - ۳, c), (-۸, ۲d + ۲)\}$$

$$\begin{cases} (-۲, ۴) \\ (-۲, a + b) \end{cases} \Rightarrow a + b = ۴ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} (۰, a^{۲} - b^{۲}) \\ (۰, -۲۰) \end{cases} \Rightarrow a^{۲} - b^{۲} = -۲۰ \Rightarrow (a - b)(a + b) = -۲۰ \xrightarrow{(۱)} ۴(a - b) = ۲۰ \Rightarrow a - b = -۵ \quad (۲)$$

حال با بازنویسی رابطهٔ R داریم:

$$R = \{(۰, -۲۰), (-۲, ۴), (-۸, ۴), (d - ۳, c), (-۸, ۲d + ۲)\}$$

بنابر تعریف تابع:

$$\begin{cases} (-۸, ۴) \\ (-۸, ۲d + ۲) \end{cases} \Rightarrow ۲d + ۲ = ۴ \Rightarrow ۲d = ۲ \Rightarrow d = ۱$$

از طرفی:

$$\begin{cases} (d - ۳, c) = (-۲, c) \\ (-۲, ۴) \end{cases} \Rightarrow c = ۴$$

۱۴ **۴** ۳ ۲ ۱

$\boxed{\text{فرم تابع خطی : } y = ax + b}$

$$y = ax + b$$

$$(۱, m) : \ m = a + b \ (I)$$

$$(۲, ۰) : \ ۰ = ۲a + b \ (II)$$

$$(m, -۸) : \ -۸ = ma + b \ (III)$$

$$(I), (II) : \begin{cases} m = a + b \\ \underline{۰ = ۲a + b} \end{cases} \qquad m = -a \ (IV)$$

$$(II), (III) : \begin{cases} ۰ = ۲a + b \\ \underline{-۸ = ma + b} \end{cases} \qquad -۸ = (m - ۲)a \ (V)$$

$$(IV), (V) : \begin{cases} m = -a \\ -۸ = (m - ۲)a \xrightarrow{m=-a} -۸ = (-a - ۲)a \Rightarrow -۸ = -a^{۲} - ۲a \end{cases}$$

$$a^۲+۲a-۸=۰ \Rightarrow (a+۴)(a-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۴ \Rightarrow \boxed{m=۴} \\ a=۲ \Rightarrow \boxed{m=-۲} \end{cases}$$

(۱۵) (۴) (۳) (**۲**) (۱)

$$۲\le x\le ۳:\ f(x)=x-۲-(x-۴)+(۲x-۶)=x-۲-x+۴+۲x-۶=\boxed{۲x-۴}$$

$$۳\le x\le ۴:\ f(x)=x-۲-(x-۴)-(۲x-۶)=x-۲-x+۴-۲x+۶=\boxed{-۲x+۸}$$

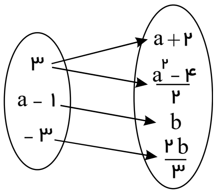
$$۴\le x\le ۸:\ f(x)=x-۲+x-۴-۲x+۶=\boxed{۰}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=۲x-۴ \xrightarrow{\text{دامنه } [۲,۳]} R=[۰,۲] \\ f(x)=-۲x+۸ \xrightarrow{\text{دامنه } [۳,۴]} R=[۰,۲] \\ f(x)=۰ \xrightarrow{\text{دامنه } [۴,۸]} R=\{۰\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Min=۰ \\ Max=۲ \end{array}$$

$$Min+Max=۰+۲=\boxed{۲}$$

(۱۶) (۴) (۳) (۲) (**۱**)

یک نمودار پیکانی فقط در صورتی تابع است که از هر یک از اعضاء مجموعه اول فقط یک پیکان خارج شود.
اگر دو پیکان خارج شده بود، حتماً باید تکراری باشند.

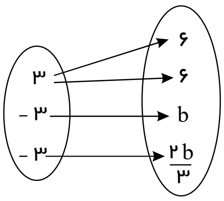


باتوجه به اینکه از ۳ دو پیکان خارج شده و رابطه تابع است پس هر دو پیکان باید به مقداری مساوی ختم شوند. درنتیجه:

$$a+۲=\frac{a^۲-۴}{۲} \Rightarrow ۲a+۴=a^۲-۴ \Rightarrow a^۲-۲a-۸=۰ \Rightarrow (a-۴)(a+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=-۲}\ (I) \\ \text{یا} \\ \boxed{a=۴}\ (II) \end{cases}$$

با فرض (I) سؤال را ادامه می‌دهیم: رابطه به شکل مقابل درمی‌آید:

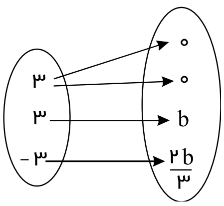
با استدلال مشابه خواهیم داشت:



$$b=\frac{۲b}{۳} \Rightarrow ۲b=۳b \Rightarrow \boxed{b=۰}$$

با فرض (II) سؤال را ادامه می‌دهیم: رابطه به شکل مقابل درمی‌آید:

و نتیجه می‌گیریم: $\boxed{b=۶}$



با فرض I داریم:

$$\begin{cases} a=-۲ \\ b=۰ \end{cases} \to a-b=-۲$$

با فرض II داریم:

$$\begin{cases} a=۴ \\ b=۶ \end{cases} \to a-b=-۲$$

می‌بینیم که با هر دو فرض، مقدار $a-b$ برابر است. در حالی که سایر گزینه‌ها مقادیر مختلفی خواهند داشت.

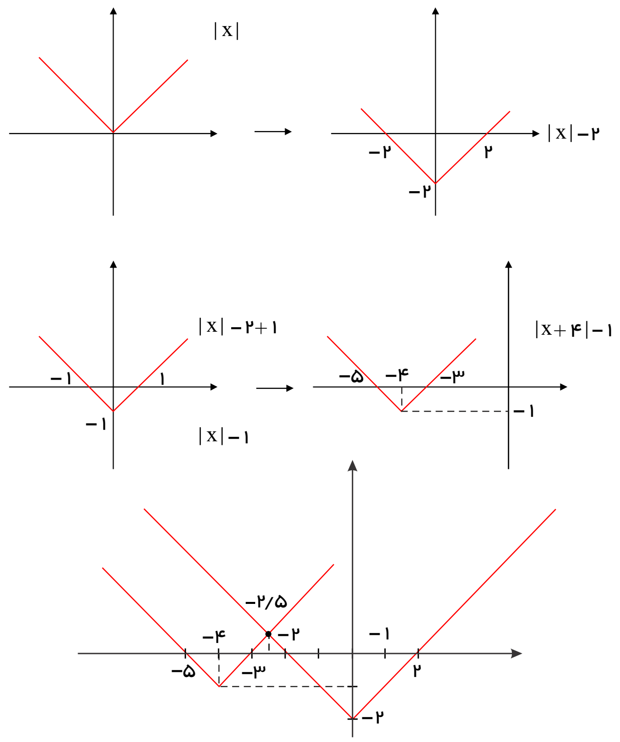
(۱۷) (۴) (۳) (۲) (**۱**)

$$f(x+۱)=(x-۱)^۲$$

$$x+۱=t \Rightarrow x-۱=t-۲$$

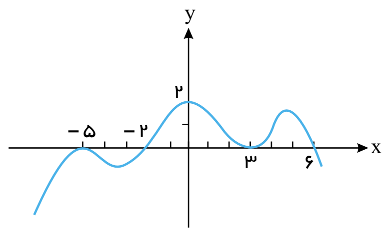
$$f(t)=(t-۲)^۲ \xrightarrow{t\to x} f(x)=(x-۲)^۲$$

(۱۸) (۴) (۳) (**۲**) (۱) **با رسم هر دو تابع داریم:**



۱۹) ۱ ۲ ۳ **۴**

برای تعیین مجموعه جواب نامعادله کافی است عبارت داده شده را تعیین علامت کنیم:



$$\frac{(۳x^۲-x^۳)f(x)}{(x+۲)^۳}\leq ۰ \Rightarrow \frac{x^۲(۳-x)f(x)}{(x+۲)^۳}\leq ۰$$

x	$-\infty$		-۵		-۲		۰		۳		۶		$+\infty$
$x^۲$		+		+		+	۰	+		+		+	
$۳-x$		+		+		+		+	۰	−		−	
$f(x)$		−	۰	−	۰	+		+	۰	+	۰	−	
$(x+۲)^۳$		−		−	۰	+		+		+		+	
کل کسر		+	۰	+	ت ن	+	۰	+	۰	−	۰	+	

طبق جدول، مجموعهٔ جواب نامعادله به‌صورت $\{-۵, ۰\} \cup [۳, ۶]$ است، بنابراین اعداد صحیح −۵ و ۰ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ در مجموعه جواب نامعادله وجود دارند که تعداد آن‌ها برابر ۶ است.

۲۰) ۴ ۳ **۲** ۱ چشم‌انداز: با توجه به اینکه x و y هر دو عبارت‌های درجه دو هستند، بنابراین وقتی تشکیل تابع می‌دهند که مجموع دو مربع کامل برابر صفر باشد. در این صورت تابع فقط از یک زوج مرتب تشکیل می‌شود.

$$۴x^۲+y^۲-۴x+۴y+a=۰ \Rightarrow ۴x^۲-۴x+۱+y^۲+۴y+۴+a-۱-۴=۰ \Rightarrow (۲x-۱)^۲+(y+۲)^۲+a-۵=۰ \Rightarrow a-۵=۰ \Rightarrow a=۵$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱
۲	۱
۳	۴
۴	۳
۵	۲
۶	۱
۷	۱
۸	۱
۹	۴
۱۰	۲
۱۱	۴
۱۲	۳
۱۳	۴
۱۴	۴
۱۵	۲
۱۶	۱
۱۷	۱
۱۸	۲
۱۹	۴
۲۰	۲