

پاسخنامه تشریحی

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \rightarrow \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0$$

$$\rightarrow \frac{7x-8-x^2-x}{(x-2)(x+1)} > 0 \rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2-6x+8}{(x-2)(x+1)} < 0 \rightarrow \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{x-4}{x+1} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -1 & 2 & 4 & +\infty \\ \hline & + & - & + & - & + \end{array}$$

توجه کنید $x=2$ مخراج را صفر می‌کند.

$$\rightarrow -1 < x < 2 \text{ یا } 2 < x < 4 \rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

روش دوم:

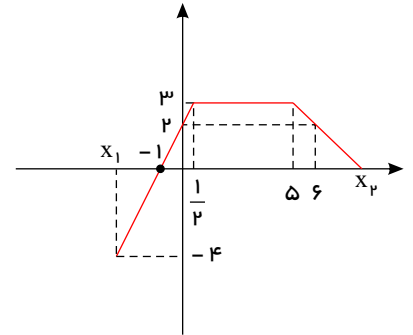
به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x=0 \rightarrow \frac{-8}{-2} > 0 \text{ : درست} \rightarrow \text{گزینه دوم حذف می‌شود}$$

$$x=3 \rightarrow \frac{13}{4} > 3 \text{ : درست} \rightarrow \text{گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

ابتدا ضابطه‌ی تابع را بدست می‌آوریم:



$$\left. \begin{array}{l} (0, 2) : 2 = b \\ (-1, 0) : 0 = -a + b \xrightarrow{b=2} -a + 2 = 0 \rightarrow a = 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2x + 2$$

$$\left. \begin{array}{l} (5, 3) : \begin{cases} 3 = 5a + b \\ 2 = 6a + b \end{cases} \\ (6, 2) : \begin{cases} 2 = 6a + b \\ 1 = -a \Rightarrow a = -1 \end{cases} \end{array} \right\}$$

$$3 = 5a + b \xrightarrow{a=-1} 3 = -5 + b \Rightarrow b = 8 \Rightarrow y = -x + 8 \quad x \geq 5$$

$$y = -x + 8 \rightarrow 0 = -x_2 + 8 \Rightarrow x_2 = 8$$

$$y = 2x + 2 \rightarrow -4 = 2x_1 + 2 \Rightarrow 2x_1 = -6 \Rightarrow x_1 = -3$$

$$\text{دامنه‌ی تابع} = [-3, 8]$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳ رأس در نقطه‌ی $(0, 0)$ قرار دارد. پس معادله‌ی آن به صورت $y = ax^2$ است، که از نقطه‌ی $(2, -1)$ نیز می‌گذرد.

$$y = ax^2 \xrightarrow{(2, -1)} -1 = a(2)^2 \Rightarrow -1 = 4a \Rightarrow a = \frac{-1}{4} \Rightarrow y = \frac{-1}{4}x^2$$

اگر سهمی را انتقال دهیم معادله‌ی آن را به صورت $y = \frac{-1}{4}x^2 + bx + c$ فرض می‌کنیم. مختصات نقطه رأس سهمی جدید $(-2, 3)$ است، پس خط $x = -2$ محور تقارن آن است.

$$-\frac{b}{2a} = -2 \xrightarrow{a=\frac{-1}{4}} -\frac{b}{-\frac{1}{2}} = -2 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow y = \frac{-1}{4}x^2 - x + c$$



$$\xrightarrow{(-2,3)} 3 = \frac{-1}{4}(-2)^2 - (-2) + c \Rightarrow 3 = -1 + 2 + c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

زمانی رابطه‌ای به شکل زوج مرتب تابع است که تمام زوج‌های مرتب آن مؤلفه‌های اول متفاوت داشته باشند یا اگر مؤلفه اول دو زوج مرتب یکسان بود مؤلفه‌های دومشان نیز باهم برابر باشند

$$\begin{cases} (3, m^2 - m) \\ (3, 0) \end{cases} \Rightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow m(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 & I \\ m^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 & II \\ m = -1 & III \end{cases} \end{cases}$$

با فرض I:

$$m = 0 \Rightarrow \begin{cases} (-3m, m) = (0, 0) \\ (2m, 2) = (0, 2) \\ (m, 3) = (0, 3) \end{cases} \Rightarrow m \neq 0$$

فرض II:

$$m = 1 \Rightarrow \begin{cases} (1, -2) = (1, -2) \\ (m, 3) = (1, 3) \end{cases} \Rightarrow m \neq 1$$

فرض III:

$$m = -1 \Rightarrow \begin{cases} (-3m, m) = (3, -1) \\ (3, 0) \end{cases} \Rightarrow m \neq -1$$

پس گزینه‌ی ۴ درست است و هیچ مقداری برای m نیست تا f تابع شود.

باتوجه به نقطه‌ی رأس و $(0, 4)$ داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\left. \begin{aligned} y = 2x^2 + bx + c \xrightarrow{(0,4)} 4 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4 \\ \text{طول رأس: } \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{4} = -3 \Rightarrow -b = -12 \Rightarrow b = 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + c = 16$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$f(3) = 2$$

$$f(1) = 1$$

$$g(f(1)) = g(1) = -1$$

$$g(4) = 0$$

$$f(g(4)) = f(0) = 1$$

$$\frac{f(3) - g(f(1))}{f(g(4))} = \frac{2 - (-1)}{1} = \frac{2 + 1}{1} = 3$$

زمانی نمودار مماس بر محور x ها می‌شود که ریشه‌ی مضاعف داشته باشد یعنی $\Delta = 0$ به عبارتی هر دو ریشه باید با هم برابر باشند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$y = (3 - \frac{x}{m})(mx - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 - \frac{x}{m} = 0 \Rightarrow \frac{x}{m} = 3 \Rightarrow x = 3m \\ mx - 1 = 0 \Rightarrow mx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{m} \end{cases}$$

از آنجایی که هر دو ریشه با هم برابر باشند تا نمودار y مماس و محور x ها باشد:

$$3m = \frac{1}{m} \Rightarrow 3m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \quad m \text{ مقدار دو}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$||x| + 3| \leq 2 \rightarrow -2 \leq |x| + 3 \leq 2 \rightarrow -5 \leq |x| \leq -1$$

از آنجایی که $|x|$ هرگز منفی نمی‌شود، معادله بالا جواب ندارد.

باتوجه به جدول می‌بینیم که در $x = a$, $y = 0$ می‌شود. پس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$(2a + b)a - 6a - 3b = 0 \Rightarrow (2a + b)a = 6a + 3b$$

$$\Rightarrow a(2a + b) = 3(2a + b) \xrightarrow{\div(2a+b)} a = 3$$

از طرفی ضریب x باید مثبت باشد تا جدول فوق را تشکیل دهد، بنابراین:

$$2a + b > 0 \Rightarrow 6 + b > 0 \Rightarrow b > -6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$-3 \leq 3x - 2 < 2$$

$$-1 \leq 3x < 4$$

$$\frac{-1}{3} \leq x < \frac{4}{3}$$

1 2 3 4 11

تابع خطی به فرم $y = ax + b$ است.

$$f(3) = 7 \rightarrow 7 = 3a + b$$

$$f(5) = 12 \rightarrow 12 = 5a + b$$

$$5 = 2a \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

$$7 = 3a + b \xrightarrow{a = \frac{5}{2}} 7 = \frac{3 \times 5}{2} + b \Rightarrow \frac{14}{2} = \frac{15}{2} + b \Rightarrow b = \frac{-1}{2}$$

$$y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \rightarrow f(7) = \frac{5 \times 7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{35 - 1}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

1 2 3 4 12

$$(x, y) \Leftrightarrow f(x) = y$$

$$f(-1) = 0$$

$$f(f(-1)) = f(0) = -1$$

$$f(0) = -1$$

$$f(f(0)) = f(-1) = 0$$

$$f(f(-1)) - f(f(0)) = -1 - 0 = -1$$

وقتی نمودار بالای محور x ها و بر آن مماس است یعنی ریشه‌ی مضاعف دارد، بنابراین: 1 2 3 4 13

$$y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2 \geq 0$$

$$\begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 9 - 4(m - 2)(m + 2) = 0 \\ a \geq 0 \Rightarrow m - 2 \geq 0 \Rightarrow m \geq 2 \quad (I) \end{cases}$$

$$9 - 4(m - 2)(m + 2) = 0 \Rightarrow 9 - 4(m^2 - 4) = 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 + 16 = 0$$

$$\Rightarrow -4m^2 + 25 = 0 \Rightarrow -4m^2 = -25 \Rightarrow 4m^2 = 25 \Rightarrow m^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{2} \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases} \xrightarrow[m \geq 2]{(I)} m = \frac{5}{2}$$

با انتقال $1 - x^2 + y = 2$ واحد به سمت چپ داریم: $y = -(x + 2)^2 + 1$ 1 2 3 4 14

و با انتقال آن، $1 + (x + 2)^2 + y = 1 + 1$ واحد به سمت بالا داریم:

$$\begin{aligned} y &= -(x + 2)^2 + 2 = -(x^2 + 4x + 4) + 2 = -x^2 - 4x - 4 + 2 \\ &= -x^2 - 4x - 2 \end{aligned}$$

بله یکم: 1 2 3 4 15

$$f(x) = \frac{(x - 1)^2 - x(x - 4)}{mx + 2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 4x}{mx + 2} = \frac{2x + 1}{mx + 2}$$

بله دوم: برد تابع یک مجموعه تک‌عضوی در نتیجه تابع ثابت است. بنابراین صورت باید ضریبی از مخرج کسر باشد. عدد ثابت صورت برابر 1 و عدد ثابت مخرج برابر 2 است. پس ضرایب عبارت مخرج کسر دو برابر ضرایب عبارت صورت کسر است. پس می‌توان نوشت:

$$m = 2 \times 2 = 4 \Rightarrow k = \frac{2x + 1}{4x + 2} = \frac{2x + 1}{2(2x + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$mk = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

بنابراین:

1 2 3 4 16

$$x^6 + x^3 + x^2 + x = 0 \Rightarrow (x^6 + x^3) + (x^2 + x) = 0 \Rightarrow x^3(x + 1) + x(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2+x) = 0 \rightarrow (x+1)x(x^2+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x = 0 \\ x^2+1 = 0 \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

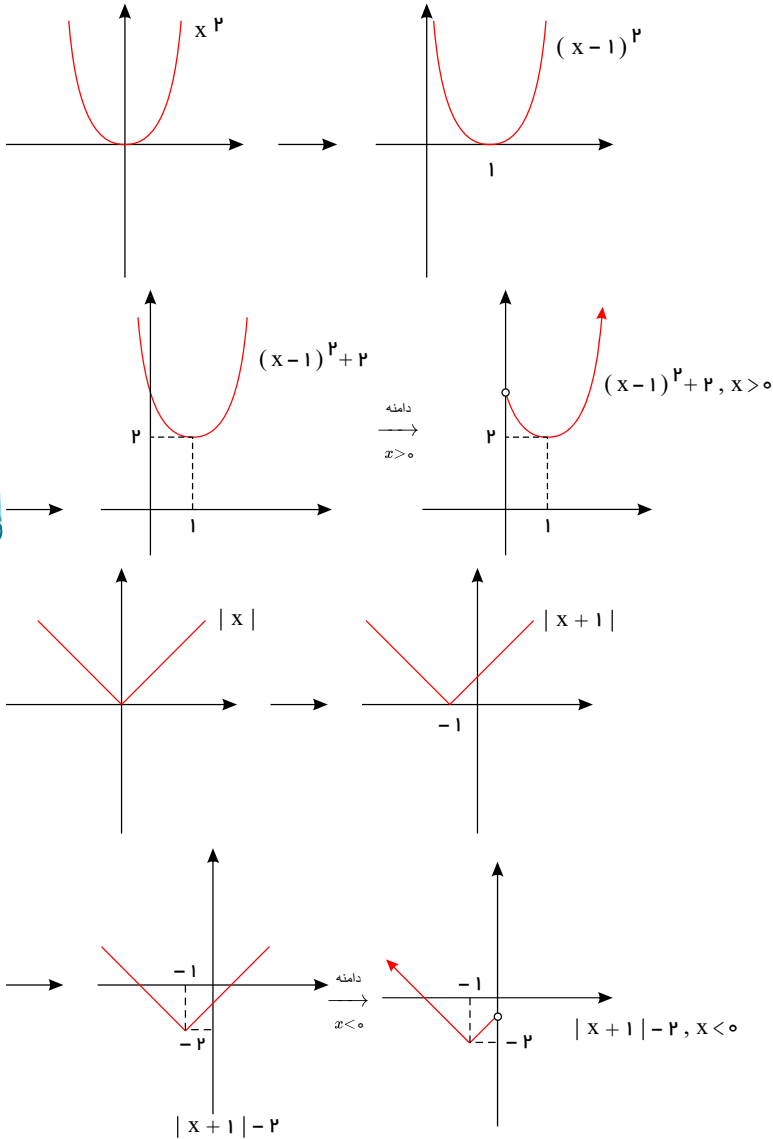
مجموع جوابها: $0 + (-1) = -1$

جدول تعیین علامت y این گونه است: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷**

| | | | | | | | | | | |
|---|--|----|---|----|---|---|---|---|---|---|
| x | | -۲ | | -۱ | | ۱ | | ۲ | | |
| y | | - | ○ | + | ○ | - | ○ | + | ○ | - |

بنابراین تنها گزینه مورد قبول گزینه ۱ است.

تابع را به روش انتقال رسم می کنیم: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸**



دقت کنید $x = 0$ در دامنه‌ی هیچ یک از ضابطه‌ها نیست.

برای داشتن ریشه‌ی مضاعف باید $\Delta = 0$ باشد، بنابراین: **۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹**

$$\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow (-6m)^2 - (4 \times m^2 \times (2m+n)) = 0 \Rightarrow 36m^2 - (4m^2(2m+n)) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور } 4m^2} 4m^2(9 - (2m+n)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ قابل قبول نیست چون معادله درجه دو تشکیل نمی‌شود} \\ 9 - 2m - n = 0 \Rightarrow 2m + n = 9 \end{cases}$$

با قرار دادن $2m + n = 9$ معادله بصورت زیر در می آید:

$$m^2 x^2 - 6mx + 9 = 0$$

$$m^2 \left(\frac{x}{m}\right)^2 - 6m \times \frac{x}{m} + 9 = 0$$

ریشه‌ی هر معادله در آن صدق می کند، بنابراین:



$$\Rightarrow \frac{9}{16}m^2 - \frac{9}{2}m + 9 = 0 \xrightarrow{\div 9} \frac{1}{16}m^2 - \frac{1}{2}m + 1 = 0 \xrightarrow{\times 16} m^2 - 8m + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 4)^2 = 0 \Rightarrow m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \xrightarrow{2m+n=9} 2 \times (4) + n = 9 \Rightarrow n = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰

در معادله‌ی درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ اختلاف ریشه‌ها برابر است با $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$$|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$3x^2 - 15x + m = 0$$

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(-15)^2 - (4 \times 3 \times m)}}{|3|} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{15^2 - 12m}}{3} = 2 \Rightarrow \sqrt{225 - 12m} = 6 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 225 - 12m = 36$$

$$\Rightarrow 189 = 12m \Rightarrow m = \frac{189}{12} = \frac{63}{4}$$

پاسخنامه کلیدی

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۱۱ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۳ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۵ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |

| | | | | |
|----|---|---|---|---|
| ۱۶ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۷ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۸ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۱۹ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
| ۲۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |