صفر به توان صفر چیست؟

میشل هوبر، فردریک ریکی
مترجم: معصومه عرب‌پور
مدرس دانشگاه فرهنگیان؛ پردیس شهید باهنر کرمان

مقدمه

وقتی در کتاب‌های حسابان بیان می‌شود که 0^0 یک صورت مبهم است، معنایش این است که دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ وجود دارند، به گونه‌ای که $f(x)$ و $g(x)$، هر دو به سمت صفر میل می‌کنند و باید حد $\left[\underset{x\to 0}{f(x)}\right]^{g(x)}$ محاسبه شود. اما اگر ۰، تنها یک عدد باشد چه می‌شود؟ در چنین حالتی، ما بحث می‌کنیم که مقدار آن، برخلاف آن‌چه که اغلب کتاب‌های درسی می‌گویند، کاملاً خوش ـ تعریف است. در حقیقت، $0^0=1$

کلیدواژه‌ها: صورت‌های مبهم، رفع ابهام

کتاب‌های جبر در عصر حاضر

یک کتاب درســی ریاضیات دبیرســتانی را بردارید خواهید دید که در آن، صفر به توان صفر(0^0) به‌عنوان یک صورت مبهم بیان شده است. برای مثال، متن زیر از یک کتاب درسی ریاضی که در یکی از نواحی نیویورک تدریس می‌شود، آورده شده است [۶]:

قاعدهٔ تقسیم توان‌ها را با پایه‌های مساوی، یادآوری می‌کنیم:

$$x^a \div x^b = x^{(a-b)} \qquad (x\neq 0)$$

اگر نیازی به این که a>b نباشد، آن‌گاه a با b مساوی است. وقتی a=b:

$$x^a \div x^b = x^a \div x^a = x^{(a-a)} = x^0$$

اما

$$x^a \div x^a = 1$$

بنابراین، به‌منظور با معنی بودن x^0 باید تعریف زیر را بیان کنیم:

$$x^0 = 1 \qquad (x\neq 0)$$

از آنجا که تعریف $x^0=1$ براساس تقسیم بنا شده و تقسیم بر صفر ممکن نیست، باید فرض کنیم $x\neq 0$. در واقع عبارت صفر به توان صفر یکی از صورت‌های مبهم در ریاضی است و غیر ممکن است که یک مقدار را به یک عبارت مبهم نسبت داد.

صورت‌های مبهم

در کتاب‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، این مسئله معمولاً تحت عنوان «قاعده هوپیتال» مطرح می‌شود.

فرض کنید دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داده شده‌اند، به‌طوری که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. وقتی بخواهیم حد تابع $[(f(x)]^{g(x)}$ را در a به‌دســت بیاوریم، می‌گوییم این یک صورت مبهم از نوع 0^0 اســت و حد می‌تواند مقادیر

گوناگونی از f و g را به خود بگیرد. در این حالت، این سؤال پیش می‌آید که: آیا می‌توان بین 0^0 به‌عنوان صورت مبهم و 0^0 به‌عنوان یک عدد فرق گذاشت؟

رفتار 0^0 چند صد سال است که مورد بحث بوده است. دونالد نوث [۷] اشاره می‌کند که یک ایتالیایی به نام گوگلیمو لیبری در سال ۱۸۳۰ چندین مقاله دربارهٔ 0^0 و خواص آن منتشر کرد. با این حال، اویلر در کتاب «اصول جبر» خود [۴] در سال (۱۷۷۰)، که سال‌ها قبل از لیبری به چاپ رسیده بود، چنین نوشت:

چون در این سری، توان‌های هر جمله از ضرب جملهٔ قبلی در a تولید می‌شود، که توان را، یک واحد افزایش می‌دهد، پس هرگاه جمله‌ای داده شود، می‌توان با تقسیم بر a، جمله قبلی را به‌دست آورد. زیرا این کار، توان را یک واحد کاهش می‌دهد. این روند نشان می‌دهد که جمله قبل از a^1 باید $\frac{a}{a}$ یا همان ۱ باشد، و اگر به همین ترتیب، با توجه به توان‌ها، ادامه دهیم، فوراً نتیجه می‌گیریم که جمله‌ای که قبل از جملهٔ اول است، a^0 است و به این خاصیت قابل توجه برسیم که a^0 همیشه برابر با ۱ است. با وجود این عدد a ممکن است مقادیر بزرگ یا کوچکی را به خود بگیرد؛ حتی زمانی که a هیچ باشد، می‌توان گفت که a^0 برابر با ۱ است.

مطالبی بیشتر در بارهٔ اویلر:

اویلر در سال ۱۷۴۸ در کتابی با عنوان «مقدمه‌ای بر آنالیز بی‌نهایت » [۵] می نویسد، «a^z را یک تابع نمایی در نظر بگیرید که در آن، a عددی ثابت و z یک متغیر است». اگر $z=0$، آن‌گاه داریم $a^0=1$. اگر $a=0$، در مقدار a^z پرش بزرگی برمی‌داریم وقتی مقدار z مثبت است، $a^z=0$. اگر $z=0$ آن‌گاه داریم $a^0=1$.

اویلر لگاریتم y را به‌عنوان مقدار تابع z تعریف می‌کند به‌طوری که $a^z=y$. او می‌نویسد که می‌دانیم ۱ که مبنای لگاریتم، باید عددی صحیح و بزرگ‌تر از ۱ باشد و بدین ترتیب، از ارجاع قبلی خود به احتمال مسئله‌دار بودن 0^0، اجتناب می‌کند.

جورج بارون

تعریف توان، اغلب با بی‌دقتی انجام شده است. جورج بارون تقریباً سی سال قبل از اولین مقالهٔ لیبری، مقاله‌ای با عنوان «یک بحث کوتاه دربارهٔ واژهٔ توان در حساب و جبر» [۱] در مجلهٔ Mathematical correspondent (۱۸۰۴) منتشر کرد که با این تعریف آغاز می‌شد: «توان‌های هر عدد، عبارت است از ضرب‌های متوالی که از یک عدد شروع شده و به طور مستمر، آن عدد در خودش ضرب می‌شود.»

به‌عنوان مثال، او نوشته بود که $1\times5=5$ که اولین توان ۵ است و $1\times5\times5=25$ که دومین توان ۵ است و همین طور تا آخر. به همین روش توان‌های هر عدد x را می‌توان به‌صورت x^1 و x^2 و ... نشان داد که $x^1=1\times x$ و $x^2=x^1\times x$ که بدین ترتیب ادامه می‌یابد.

بارون پس از بیان چند نتیجه، اظهار می‌داشت که «آیا تعریف مشابهی ما را به یک راه حل دقیق و قابل درک برای آنچه که توان هیچ‌ام (توان صفر) اعداد نامیده شده، راهنمایی نمی‌کند؟» و برای پاسخ به سؤال خود، برای تقسیم توان‌ها قاعده‌هایی را آدرس می‌دهد، و در همان حال، یک نتیجه متفاوت را نیز به‌دست می‌آورد.

اگر توان اول x با جواب x خلاصه شده باشد، به کمک معنای تقسیم داریم توان تبدیل به هیچ خواهد شد، ولی ۱ باقی خواهد ماند: $[x^1/(x)]=[(1\times x)/(x)]=1$، یعنی $x^0=1$، که دراینجا، x نشان‌دهندهٔ هر عدد دلخواهی است. اما از آنجا که عدد x در اینجا محدود نشده، در نتیجه توان هیچ ام هر عدد، برابر ۱ است.

در آن مقاله، بارون نوشته‌های ویلیام امرسون (۱۷۸۰) [۳] و جارد منیفلد (۱۸۰۲) [۹] را دربارهٔ «هیچ» تأیید کرد و بحث‌های آن دو را یک پله جلوتر برده و ادعا نمود که عدد x می‌تواند هر عدد بزرگ یا کوچکی باشد. وی می‌نویسد:

«به‌دنبال تعریف کاربردی ما، برای مقدار بی‌نهایت کوچک، فرض کنیم x هر مقدار کسری را نشان دهد. به عبارت دیگر، x هر مقداری از اعداد را نشان دهد (جزئی از واحد اندازه‌گیری آن). در این صورت تعریف می‌کنیم $x^1=1\times x$.

حال فرض کنید این ضرب در x خلاصه شده باشد و به دلایل پیشرفته‌تری که قبلاً آوردیم، داریم: $x^0=1$. چون در

اینجا x یک مقدار کسری بدون هیچ محدودیتی از مقادیر خیلی کوچک است، بنابراین فرض کنید x با کاهش تدریجی از مقدار کنونی خود، از بین اعداد خیلی کوچک عبور کند تا این که x به هیچ برسد. واضح است که در طول این کاهش یا نزول x^0 ، x همواره مساوی یک واحد ثابت است و دقیقاً در لحظه‌ای که x به هیچ چیز تبدیل شود، x^0 یا 0^0 نیز برابر یک است.»

البته بارون، هیچ اشاره‌ای به صورت مبهم عبارت نمی‌کند و مقالهٔ خود را با توضیح زیر، به پایان می‌رساند:

همچنین چون به ازای هر مقدار x داریم $x^0=1$، در نتیجه لگاریتم ۱ در هر مبنایی، برابر ۰ است.

گوگلیمو لیبری و کوشی آگوستین

با توجه به مقالهٔ نوث لیبری (۱۸۳۳) [۸] تحت عنوان «تولید چندین ریز موج در آب‌های ریاضیات، هنگامی که چیزی ریشه‌ای به‌نظر می‌رسد چرا که بحث دربارهٔ اینکه آیا 0^0 تعریف شده است؟ ایجاد می‌شود». اکثر ریاضیدانانِ حاضر توافق دارند که $0^0=1$ با اینکه **آگوستین لوئیس کوشی** در کتاب خود با عنوان دورهٔ آنالیز (۱۸۲۱) [۲]، 0^0 را در جدولی از صورت‌های تعریف نشده آورده است.

بدیهی است که استدلال لیبری قانع‌کننده نبود. بنابراین آگوست موبیوس به دفاع از خود برآمد. موبیوس سعی کرد به‌وسیلهٔ اثبات فرضی از $0^0=1$، از خود دفاع کند. (در اصل اثباتی از اینکه $\lim_{x\to 0^+} x^x$)

پس از این مجادله‌ها، این ســؤال برای ســایر ریاضیدانان پیش آمد که «آیا زمانی که کارهای جمع‌آوری شدهٔ موبیوس منتشر شود، این سابقهٔ تاریخی به آرامی حذف خواهد شد؟». نوث در جواب می نویسد: «نه، نه، ده هزار بار نه!» و بیان می‌کند که «بحث با این نتیجه پایان می‌یابد که 0^0، باید تعریف نشده باشد.»

شاید اگر کوشی مفهوم 0^0 را به‌عنوان یک صورت حدّیِ تعریف نشده توسعه می‌داد، آن‌گاه مقدار حد $[(f(x)]^{g(x)}$ مبهم است، هرگاه f(x) و g(x) هر کدام جداگانه به صفر نزدیک شوند. نوث در مقالهٔ خود با عنوان «مقدار 0^0 به مرتب راحت‌تر از ۰+۰ است»، ما را به یاد قضیهٔ دو جمله‌ای می‌اندازد:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

اگر این قضیه برای هر دو عدد صحیح، که حداقل یکی از آن دو نامنفی اســت برقرار باشد، آن‌گاه ریاضیدان‌ها باید باور داشته باشند که $0^0=1$، می‌توان x=۰ و y=۱ را در رابطهٔ فوق قرار داد. سمت چپ به ۱ و سمت راست به 0^0 می‌رسیم.

مثال‌ها: در سال ۱۹۷۰، **هربرت واون** [۱۰] برای به رسمیت شناختن $0^0=1$ به استدلال پرداخت. برای این منظور او سه مثال زیر را تهیه کرد:

مثال ۱: در تصاعد هندسی نامتناهی زیر:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$ برای هر x که $|x|<1$،

اگر x=۰ آن‌گاه $|x|=|0|<1$ که نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0^{n-1}=\frac{1}{1-0}=1$$

مجموع نامتناهی به‌صورت $0^0+0^1+0^2+...=1$ باز می‌شود. به گفتهٔ واون، اگر 0^0 تعریف شده نیست، این مجموع بی‌معناست. علاوه بر آن اگر $0^0 \neq 1$ آن‌گاه این مجموع غلط است.

مثال ۲: این مثال از مجموع نامتناهی e^x ناشی می‌شود که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

برای هر x، $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e^x$

هر کس قبول دارد که $0!=1$ ، اگر قرار دهیم $x=0$ مجموع بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^{n-1}}{(n-1)!} = e^0$$

مجموع می‌تواند به صورت زیر باز شود:

$$\frac{0^0}{0!}+\frac{0^1}{1!}+\frac{0^2}{2!}+\ldots = \frac{0^0}{1}+0+0+\ldots = 0^0$$

طرف راست مجموع e^0 است که مساوی ۱ است. پس $0^0=1$.

مثال ۳: سومین مثال واون برگرفته از عدد اصلی یک مجموعه از نگاشت‌هاست. به‌توان رساندنِ یک عدد اصلی در نظریهٔ مجموعه‌ها به‌صورت زیر تعریف شده است:

a^b، عدد اصلی مجموعهٔ نگاشت‌هایی از یک مجموعهٔ b عضوی به یک مجموعهٔ a عضوی است. برای مثال $2^3=8$. زیرا هشت نگاشت از مجموعهٔ $\{x , y , z\}$ به مجموعهٔ $\{a , b\}$ وجود دارد، به‌منظور محاسبهٔ 0^0 تعداد نگاشت‌ها از مجموعهٔ تهی به خودش را تعیین می‌کنیم. دقیقاً یک چنین نگاشتی وجود دارد که مجموعهٔ تک عضوی تهی است. واون نوشته است «بنابراین تا آنجا که به اعداد اصلی مربوط است، $0^0=1$».

چه وقت یک ریاضیدان ممکن است بخواهد صفر به توان صفر چیزی شود که مبهم نباشد؟ اگر برای مثال، تابع $f(x,y)=x^y$ را مطرح کنیم، مبدأ مختصات یک نقطهٔ ناپیوستگی تابع است، صرف نظر از اینکه چه مقداری را به 0^0 نسبت دهیم. تابع x^y نمی‌تواند در $x=y=0$ پیوسته باشد، چون حد x^y در امتداد خط $x=0$ برابر ۰ است. اما حد x^y در امتداد خط $y=0$ برابر ۱ است، نه صفر. برای سازگاری و سودمندی، یک انتخاب طبیعی باید به صورت تعریف $0^0=1$ باشد.

نتیجه‌گیری

ما به این روش تدریس (پداگوژی) ارج می‌نهیم که «ابتدا به دانش‌آموزان بگوییم چه می‌خواهیم بگوییم. بعد آن را بگوییم، بالاخره به آن‌ها بگوییم چه گفتیم» و با اشاره به این روش، مبحث خود را جمع‌بندی می‌کنیم.

اگر شما با حد کار می‌کنید، آن‌گاه 0^0 یک صورت مبهم است. اما اگر با جبر معمولی سر و کار دارید، آن‌گاه $0^0=1$.

مراجع

1. George Baron, “A short Disquisition, concerning the Definition, of the word Power, in Arithmetic and Algebra,” The Mathematical Correspondent (1804), pages 59 – 66.
2. Augustin-Louis Cauchy, Cours d’Analyse de l’Ecole Royale Polytechnique (1821). In his Oeuvres Complètes, series 2, volume 3.
3. William Emerson, A treatise of algebra, in two books, 2nd edition, J. Nourse, London, 1780. Title page and pages 208-213, including the problem “To explain the several properties of (0) nothing, and infinity,”
4. Leonhard Euler, Elements of Algebra, translated by Rev. John Hewlett, Springer-Verlag, New York, 1984, pages 50 – 51.
5. Leonhard Euler, Introduction to Analysis of the Infinite, translated by John D. Blanton, Springer-Verlag, New York, 1988, pages 75 – 76.
6. E. Keenan, A. X. Gantert, and I. Dressler, Mathematics B, Amsco School Publications, Inc., New York, 2002.
7. Donald Knuth, “Two Notes on Notation,” The American Mathematical Monthly, Volume 99, Number 5, May 1992, pages 403 - 422. This is available in JSTOR.
8. Guillaume Libri, “Mèmoire sur les functions discontinues,” Journal für die reine und angewandte Mathematik, 10 (1833), pages 303 - 316.
9. Jared Mansfield, Essays, mathematical and physical: containing new theories and illustrations of some very important and difficult subjects of the sciences, W. W. Morse, New Haven, 1802. Title page and pages 12-17, including first five pages of the essay “Of Nothing and Infinity,”.
10. Herbert E. Vaughan, “The Expression of 00,” The Mathematics Teacher, Volume 63, February 1970, page 111.

Michael Huber and V. Frederick Rickey, “What is 0^0? - Conclusion and Bibliography,” Loci (July 2012) - See more at: http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/what-is-00-conclusion-and-bibliography#sthash.Cylge1Ba.dpuf