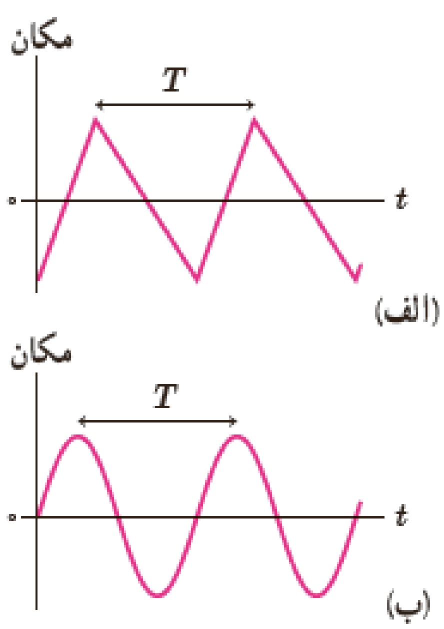
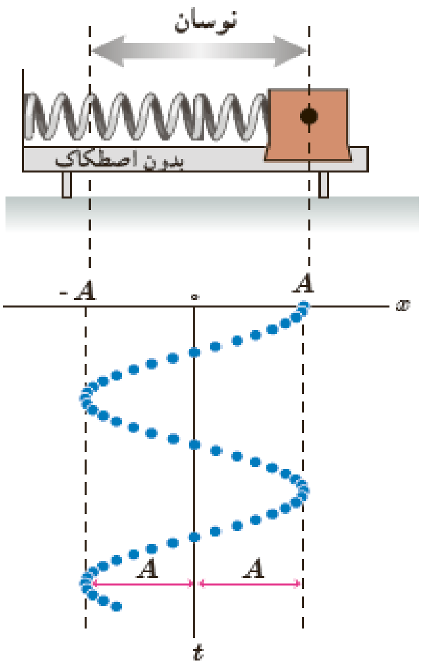
حرکت نوسانی

به هر حرکت رفت و برگشتی حرکت نوسانی می گویند . حرکت های نوسانی به دو دسته نوسان دوره ای و غیر دوره ای تقسیم می شوند. فرآیندهای دوره ای شامل نمونه مهمی از نوسانگرها بنام حرکت هماهنگ ساده (SHM) می باشند .در نوسان هارمونیک ساده متحرک روی یک خط حرکت می کند و نیروی وارد بر آن متناسب با فاصله متحرک از مبدا است و نمودار مکان زمان آن به صورت یک تابع سینوسی (کسینوسی)است.



شکل ۳ـ۳ نمودار مکان ــ زمان برای دو نمونه از نوسان دوره‌ای

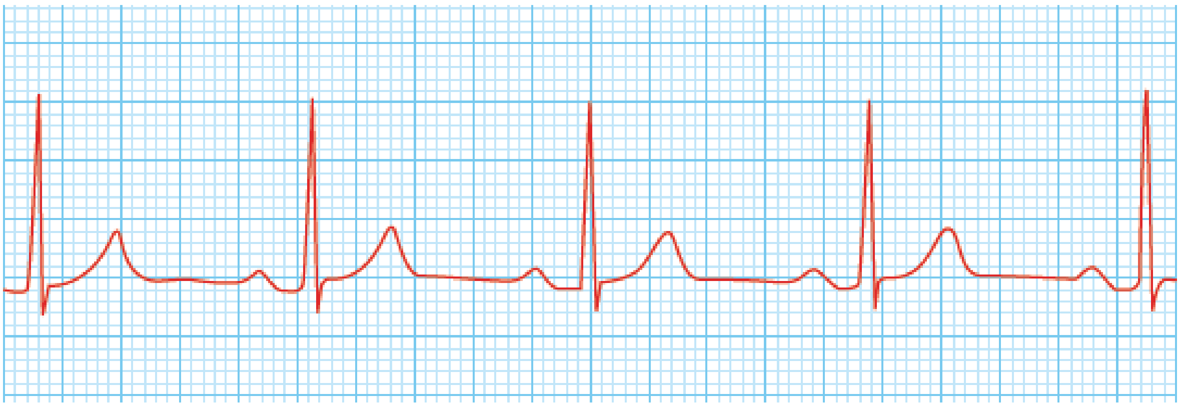


شکل ۳ـ۴ سامانهٔ جسم و فنر، نمونهٔ مشهوری از یک حرکت هماهنگ ساده است.

سوال : در حرکت نوسانی دوره تناوب (T) و فرکانس (f) را تعریف کنید.

چه رابطه ای بین این دو کمیت وجود دارد؟

سوال شکل زیر نوسان قلب را نمایش می دهد . آیا این حرکت هارمونیک ساده است؟ اگر نوسان قلب به طور متوسط ۶۵ عدد در دقیقه باشد ، دوره تناوب و فرکانس قلب را بدست آورید.

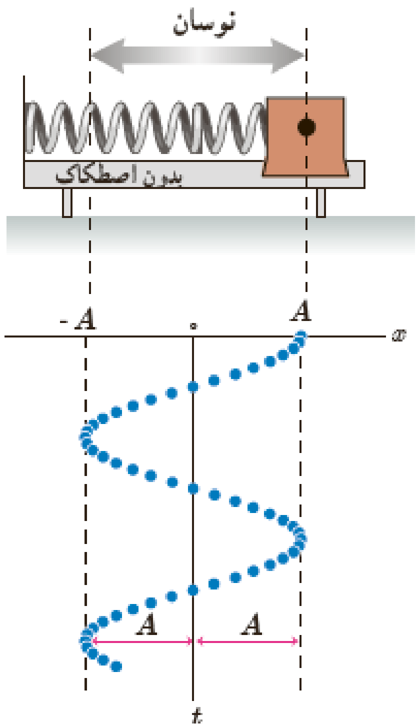


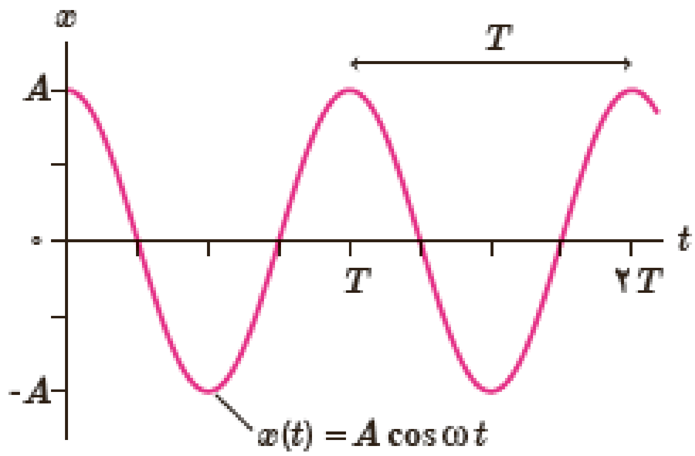
شکل ۳ـ۲ نمونه‌ای از نمودار الکتروقلب نگاره[۱] (نوار قلب) یک شخص[۲]

دو نوسانگر A و B با هم به نوسان درمی‌آیند. اگر دورهٔ تناوب نوسانگر A برابر ۲/۴ ثانیه و دورهٔ تناوب نوسانگر B برابر ۱/۸ ثانیه باشد
پس از چند ثانیه نوسانگر B، ۴ نوسان کامل از A جلو می‌افتد؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۸/۸ ۴) ۳۶/۲

سوال : اگر یک فنر را روی سطح بدون اصطکاک کشیده و رها کنید(شکل مقابل). معادله حرکت جسم را نوشته و نمودار مکان – زمان آن را رسم کنید.





شکل ۳ــ۵ نمودار مکان ــ زمان برای حرکت هماهنگ ساده

$x(t) = A\cos\omega t$	(معادلهٔ مکان ــ زمان در حرکت هماهنگ ساده)	(۳ــ۲)

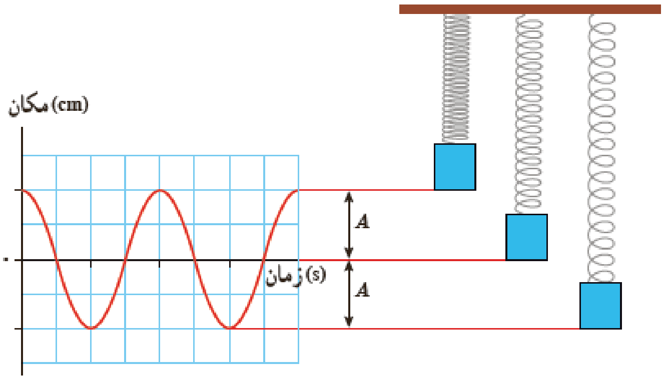
در این رابطه ω بسامد زاویه‌ای نوسانگر نامیده می‌شود و برابر است با :

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$	(بسامد زاویه‌ای)	(۳ــ۳)

یکای بسامد زاویه‌ای در SI برابر rad/s است.

مثال ۳ــ۱

جرمی متصل به یک فنر با بسامد $۰/۲۰\ \mathrm{Hz}$ و دامنهٔ $۳/۰\ \mathrm{cm}$ به‌طور هماهنگ ساده در امتداد قائم نوسان می‌کند. پس از گذشت $۱۰/۶۶\mathrm{s}$ از رها شدن جرم از بالای نقطهٔ تعادل، جابه‌جایی این جرم نسبت به نقطهٔ تعادل چقدر است؟



پاسخ : با استفاده از رابطهٔ $x = A\cos\omega t$ جابه‌جایی نسبت به نقطهٔ تعادلِ جرم ــ فنر را محاسبه می‌کنیم :

که در آن :

$$A = ۰/۰۳۰\mathrm{m}\ ,\ \omega = ۲\pi f = ۲\pi\,(۰/۲۰\mathrm{s}^{-۱}) = ۰/۴۰\pi\ \mathrm{rad/s}\ ,\ t = ۱۰/۶۶\mathrm{s}$$

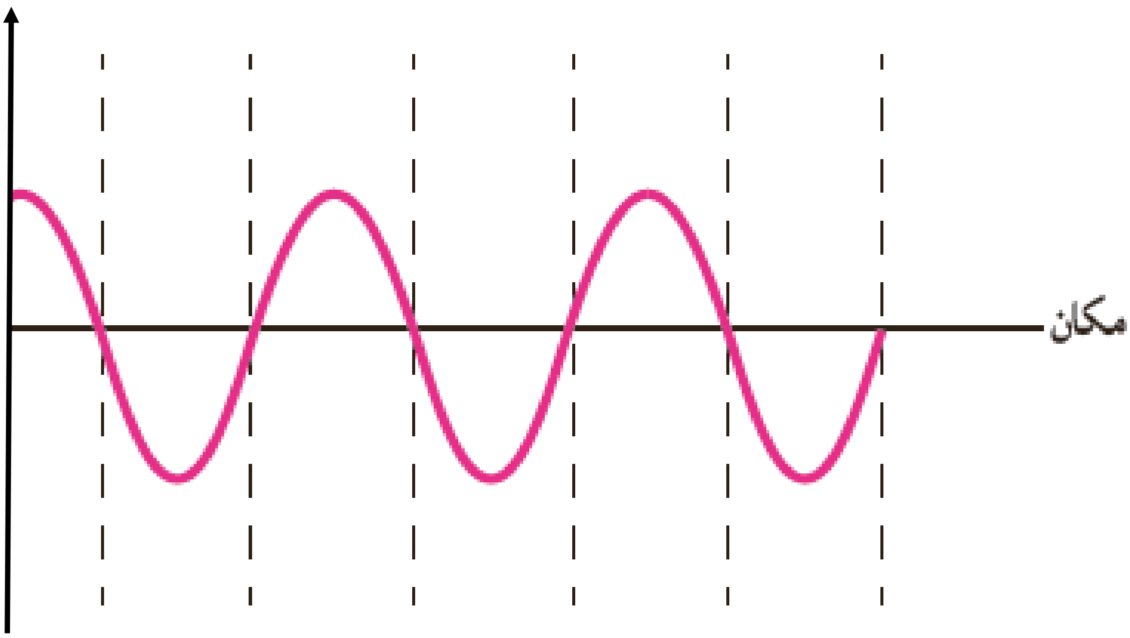
در نتیجه، در یکای SI داریم[۳] :

$$x = (۰/۰۳۰\mathrm{m})\cos(۰/۴۰\pi\ \mathrm{rad/s} \times ۱۰/۶۶\mathrm{s}) = ۰/۰۲۰\mathrm{m}$$

تمرین ۳ــ۱

ذره‌ای در حال نوسان هماهنگ ساده با دورهٔ تناوب T است. با فرض اینکه در $t=۰\mathrm{s}$ ذره در $x=+A$ باشد، تعیین کنید در هر یک از لحظات زیر، آیا ذره در $x=-A$، در $x=+A$، یا در $x=۰$ خواهد بود؟ الف) $t=۲/۰۰\,T$، ب) $t=۳/۵۰\,T$، پ) $t=۵/۲۵\,T$

(*راهنمایی* : برای پاسخ به این تمرین، ساده‌تر آن است که چند دوره از یک نمودار کسینوسی را رسم کنید.)

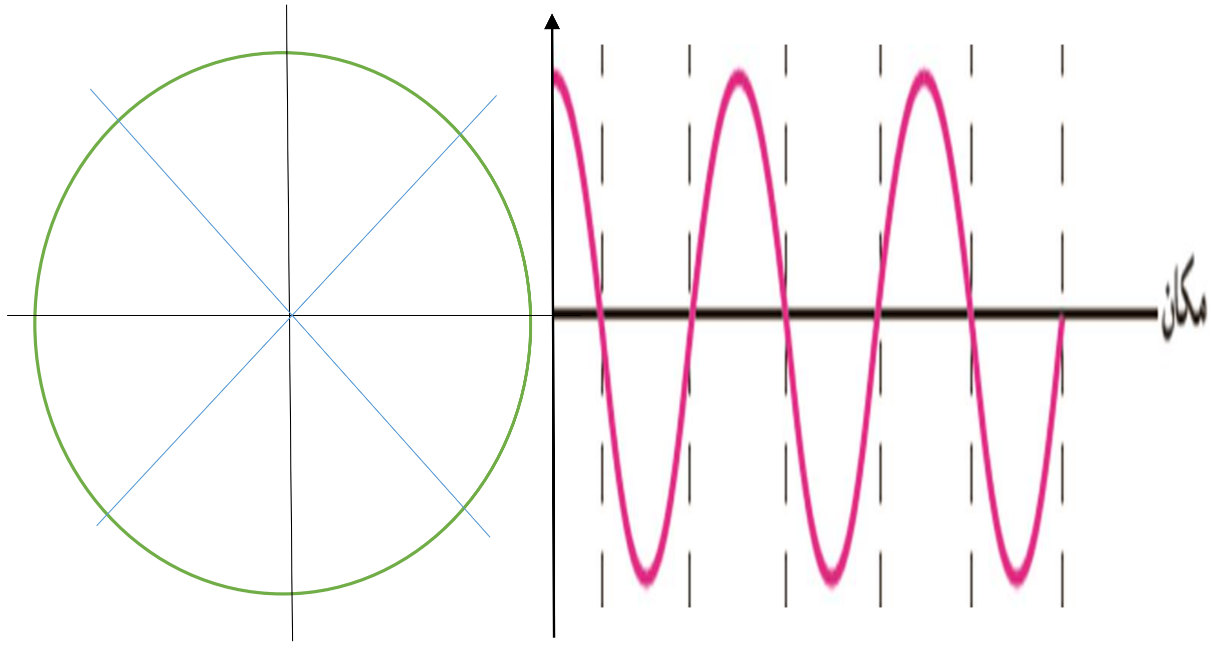


تمرین ۳ـ۲

در حرکت هماهنگ ساده، مکان $x(t)$ باید پس از گذشت یک دورهٔ تناوب برابر مقدار اولیه‌اش شود. یعنی اگر $x(t)$ مکان در زمان دلخواه t باشد، آن‌گاه نوسانگر باید در زمان $t+T$ دوباره به همان مکان بازگردد و بنابراین $A\cos\omega t = A\cos\omega(t+T)$. براین اساس نشان دهید $\omega=2\pi/T$.

- نوسانگری روی محور x حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و مبدأ مختصات نقطهٔ تعادل (مرکز نوسان) است. اگر دامنهٔ حرکت نوسانگر ۲cm و بسامد حرکتش $\frac{1}{4}$ Hz باشد. بزرگی سرعت متوسط نوسانگر در کمترین بازهٔ زمانی که از مکان $+\sqrt{2}$cm در جهت محور x عبور می‌کند و سپس به مکان $-\sqrt{2}$cm می‌رسد، چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

۱) صفر ۲) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ۴) $\sqrt{2}$



معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده‌ای در SI به‌صورت $x = ۰/۳\cos(۵۰\pi t)$ است. حداقل در مدت چند ثانیه، تندی حرکت این نوسانگر از صـفر به بیشینهٔ خود می‌رسد؟

۱) ۰/۰۱ ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۰۳ ۴) ۰/۰۴

نوسانگر ساده‌ای روی پاره‌خط MN در دو طرف نقطهٔ تعادل O، نوسان می‌کند. اگر MP برابر PO بوده و نوسانگر MP را در مدت ۰/۲ ثانیه بپیماید، دورهٔ تناوب نوسان چند ثانیه است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۸

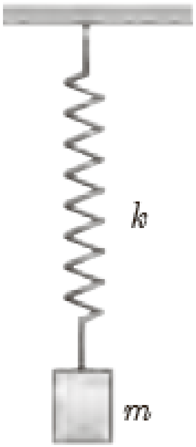
۳) ۱/۲ ۴) ۱/۶

. نوسانگری در یک بُعد، در لحظهٔ $t_۱$ در مکان $+\frac{A}{\sqrt{۲}}$ و در لحظهٔ $t_۲ > t_۱$ در مکان $+\frac{A}{۲}$ قرار دارد. اندازهٔ بیش‌ترین سرعت متوسط نوسانگر در بازهٔ $t_۱$ تا $t_۲$ کدام است؟ (A دامنهٔ نوسان و T دورهٔ حرکت است.) (سراسری ریاضی - ۸۴)

۱) $۱۲(\sqrt{۲}+۱)\frac{A}{T}$ ۲) $\frac{۱۲(\sqrt{۲}-۱)}{۷}\frac{A}{T}$ ۳) $\frac{۱۲(\sqrt{۲}+۱)}{۷}\frac{A}{T}$ ۴) $۱۲(\sqrt{۲}-۱)\frac{A}{T}$

دوره تناوب در حرکت نوسانی

الف) دستگاه فنر –جرم



با انتخاب وزنه‌ها و فنرهای مختلف در آرایشی مطابق شکل، و با اندازه‌گیری زمان تعداد مشخصی نوسان کامل، و سپس محاسبهٔ دورهٔ تناوب T برای هر سامانهٔ جرم ــ فنر، به‌طور تجربی نشان دهید که :

الف) دورهٔ تناوب سامانهٔ جرم ــ فنر با یک فنر معیّن ولی وزنه‌های متفاوت، با جذر جرم وزنه به‌طور مستقیم متناسب است ($T \propto \sqrt{m}$).

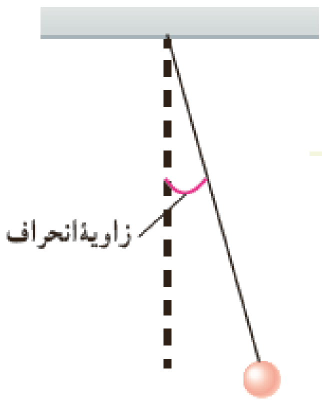
ب) دورهٔ تناوب سامانهٔ جرم ــ فنر با یک وزنهٔ معیّن ولی فنرهای متفاوت، با جذر ثابت فنر به‌طور وارون متناسب است ($T \propto ۱/\sqrt{k}$).

پ) دورهٔ تناوب سامانهٔ جرم ــ فنر مستقل از دامنه است.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

ب)آونگ ساده

آزمایش‌های متعدد و محاسبه، نشان می‌دهد دورهٔ تناوب آونگ ساده فقط به شتاب گرانشی (g) و طول آونگ (L) بستگی دارد، و از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L}$$

این رابطه نشان می‌دهد که دورهٔ تناوب آونگ ساده به جرم و دامنهٔ آن بستگی ندارد.

مثال ۳ـ۴

بستگی دورهٔ تناوب آونگ به شتاب گرانشی، روش دقیقی را برای تعیین g به‌دست می‌دهد. در این روش با اندازه‌گیری طول L و دورهٔ تناوب T، می‌توان g را به‌دست آورد. ژئوفیزیک‌دانی با استفاده از یک آونگ ساده به طول ۰/۱۷۱m که ۷۲/۰ نوسان کامل را در ۶۰/۰s انجام می‌دهد، شتاب g زمین را در مکانی خاص تعیین می‌کند. وی مقدار g را در این مکان چقدر به‌دست می‌آورد؟

پاسخ: رابطهٔ دورهٔ تناوب آونگ ساده را برای g حل می‌کنیم:

$$g=\frac{۴\pi^۲L}{T^۲}$$

که در آن T دورهٔ تناوب این آونگ است:

$$T=\frac{\text{زمان}}{\text{تعداد نوسان‌ها}}=\frac{۶۰/۰\text{s}}{۷۲/۰}=۰/۸۳۳\text{s}$$

در نتیجه g چنین به‌دست می‌آید:

$$g=\frac{۴\pi^۲L}{T^۲}=\frac{۴\pi^۲(۰/۱۷۱\text{m})}{(۰/۸۳۳\text{s})^۲}=۹/۷۳\text{m}/\text{s}^۲$$

نمودار شتاب جاذبه بر حسب طول آونگ را رسم کنید.

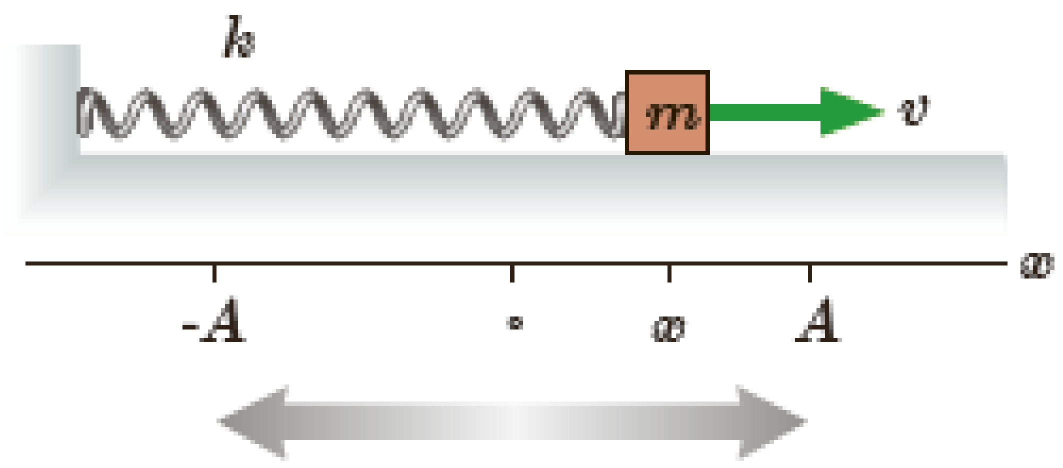
جسمی به جرم m به فنری به ثابت k متصل است و با دورهٔ ۰/۱π ثانیه نوسان می‌کند. اگر جرم جسم ۱۹۰g کاهش یابد با دورهٔ ۰/۰۹π ثانیه نوسان می‌کند. k چند نیوتون بر سانتی‌متر است؟

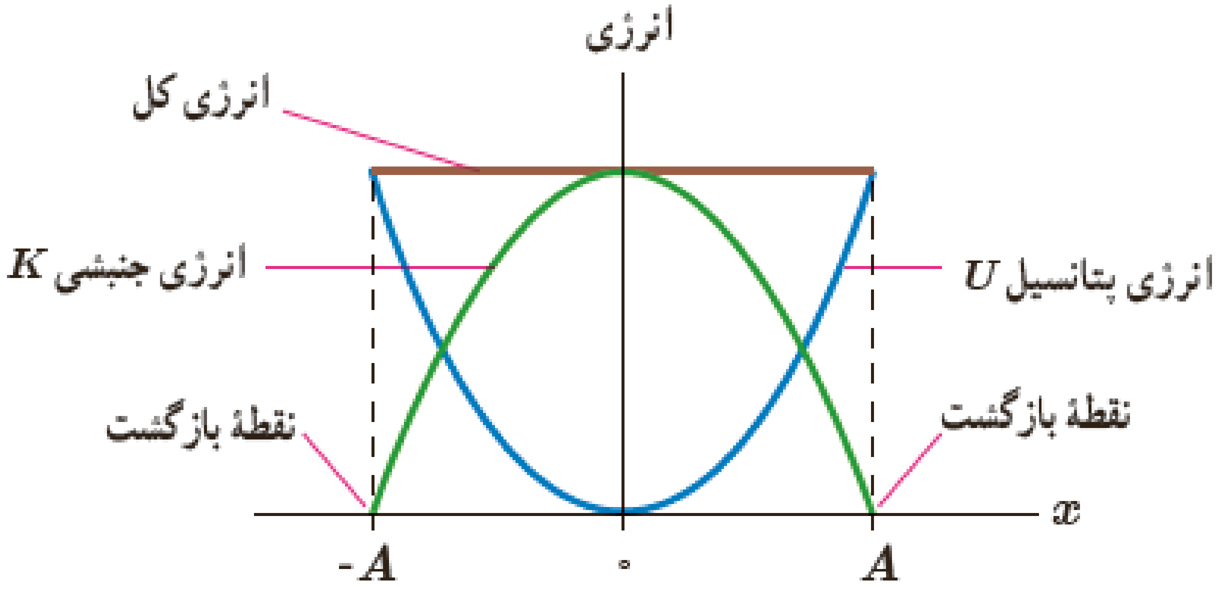
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

آونگ ساده‌ای در مدت ۷۲ ثانیه، ۴۰ نوسان کامل انجام می‌دهد. طول آونگ را چگونه تغییر دهیم تا در همان مکان و در همان مدت ۴۵ نوسان کامل انجام دهد؟ $(g = \pi^2 \frac{m}{s^2})$

۱) 9cm کاهش دهیم. ۲) 9cm افزایش دهیم. ۳) 17cm کاهش دهیم. ۴) 17cm افزایش دهیم.

انرژی در حرکت هماهنگ ساده





$$E = K + U$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$K = E - U$$

(۳ـ۶)	(انرژی مکانیکی سامانهٔ جرم ــ فنر)	$E=\frac{1}{2}kA^2$

برقرار است :

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=2\pi^2mA^2f^2$$

یا :

(۳ـ۷)	(انرژی مکانیکی نوسانگر هماهنگ ساده)	$E=2\pi^2 mA^2f^2$

اگرچه پایستگی انرژی مکانیکی و تبدیل انرژی‌های جنبشی و پتانسیل به یکدیگر را فقط برای نوسانگر جرم ــ فنر بررسی کردیم، ولی می‌توان نشان داد در حالت کلی، برای هرگونه نوسانگر هماهنگ سادهٔ دیگری (از جمله آونگ ساده) نیز برقرار است. همچنین بنا به رابطهٔ ۳ـ۷ انرژی مکانیکی هر نوسانگر هماهنگ ساده‌ای متناسب با مربع دامنه (A^2) و مربع بسامد (f^2) است.

مثال ۳ـ۳

الف) نشان دهید تندی بیشینه در حرکت هماهنگ ساده برابر است با $A\omega$.

ب) تندی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که با دامنهٔ ۱۰cm و دورهٔ ۰/۵۰s نوسان می‌کند هنگام عبور از نقطهٔ تعادل چقدر است؟

پاسخ : الف) بیشینهٔ تندی در حرکت هماهنگ ساده هنگام عبور نوسانگر از نقطهٔ تعادل رخ می‌دهد، جایی که انرژی پتانسیل صفر است. با استفاده از تعریف انرژی مکانیکی ($E=K+U$) و همچنین رابطه‌های ۳ـ۷ و ۳ـ۳ خواهیم داشت :

$$2\pi^2mA^2f^2=\frac{1}{2}mv_{max}^2+0\Rightarrow v_{max}=2\pi Af=A\omega$$

ب)

$$v_{max}=A\omega=A(\frac{2\pi}{T})=(0/10\,\text{m})(\frac{2\pi}{0/50\,\text{s}})=1/3\,\text{m/s}$$

جسمی به جرم ۱۰۰g به فنری متصل است و روی سطح افقی بدون اصطکاک، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر ۰٫۸mJ باشد، لحظه‌ای که انرژی پتانسیل نوسانگر ۰٫۴mJ است، سرعت نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه می‌شود؟

۱) ۲   ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) ۴   ۴) $۴\sqrt{۱۰}$

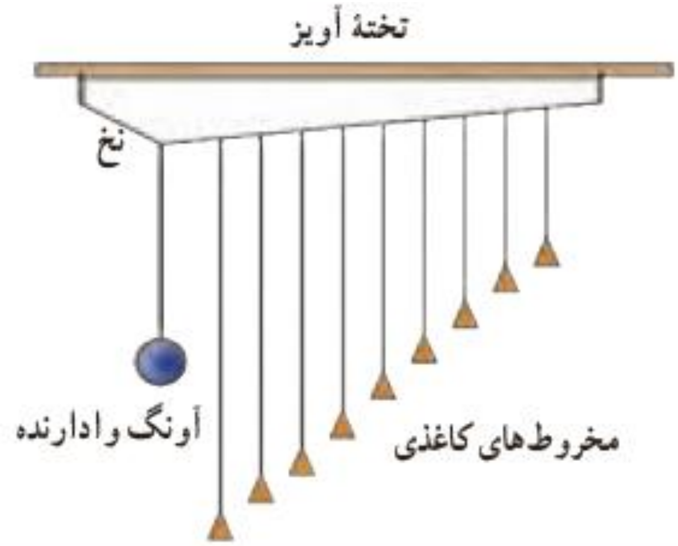
دامنهٔ نوسان وزنه‌ای به جرم $1kg$ که به یک فنر با ثابت $5\frac{N}{cm}$ متصل است، $4cm$ است و روی سطح افقی نوسان می‌کند. اگر انرژی پتانسیل کشسانی این نوسانگر در نقطه‌ای از مسیر $0/2J$ باشد، بزرگی سرعت نوسانگر در این لحظه چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟ (از نیروهای اتلافی صرف‌نظر شود.)

۱) $20\sqrt{10}$ ۲) $40\sqrt{10}$ ۳) $20\sqrt{5}$ ۴) $40\sqrt{5}$

در لحظه‌ای که انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر ساده ۲۵ درصد انرژی مکانیکی آن است، تندی نوسانگر چند برابر بیشینهٔ تندی آن است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۳، با تغییر)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

تشدید



شکل ۳ــ۹ با هُل دادن تاب، کودک به نوسان واداشته می‌شود.

تمرین ۳ــ۳

طول تعدادی آونگ ساده که از میله‌ای افقی آویزان‌اند، عبارت‌اند از، ۰/۴۰m، ۰/۸۰m، ۱/۲m، ۲/۸m، ۳/۵m. فرض کنید میله دستخوش نوسان‌هایی افقی با بسامد زاویه‌ای در گسترهٔ ۲/۰rad/s تا ۴/۰rad/s بشود. کدام آونگ‌ها با دامنهٔ بزرگ‌تری به نوسان درمی‌آیند؟ (توجه کنید گرچه تشدید در بسامد مشخصی رخ می‌دهد، اما دامنهٔ نوسان در نزدیک این بسامد همچنان بزرگ است).